

Soluzione TEMA 1, 21 GIUGNO 2024

1. Si intende risolvere l'equazione $f(x) = 0$, dove $f(x) = \ln(1+x^2) + \arctan(x)$.
- Si mostri esistenza ed unicità della soluzione ξ nell'intervallo $[-5, -0.7]$.
 - A partire dal punto iniziale $x_0 = -1.7$ si approssimi tale soluzione con il metodo di Newton-Raphson. Ci si arresti quando il **residuo** ($f(x_k)$) in valore assoluto è inferiore a 2×10^{-5} . Assumendo $M = 0.25$, stimare l'errore all'ultima iterazione.
 - A partire da $x_0 = -1.7$ si mostri che il metodo della tangente fissa converge a ξ , e se ne stimi il numero di iterazioni per ottenere una riduzione dell'errore iniziale di 2×10^{-5} . Se invece si partisse da $x_0 = -0.7 \dots$?
 - A partire da $x_0 = -4.4656519$ si eseguano due iterazioni con Newton. Si commenti il risultato ottenuto (per esempio con una giustificazione grafica).

- (a) La funzione è continua e cambia segno agli estremi:

$$f(-5) = 1.88, \quad f(-0.7) = -0.21,$$

pertanto per il teorema degli zeri esiste una soluzione. Per dimostrare l'unicità si osserva che la derivata $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ è negativa in tutto l'intervallo e quindi la funzione f è monotona decrescente.

	k	x_k	$ f(x_k) $
(b) Iterazioni e relativi residui	0	-1.7	—
	1	-1.1824081	5.9×10^{-3}
	2	-1.1720648	$1.5 \times 10^{-5} < 2 \times 10^{-5}$: stop.

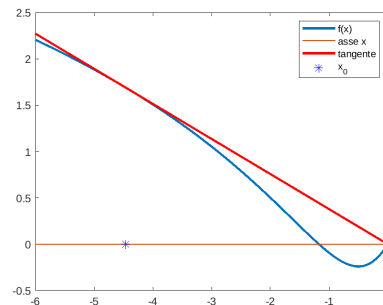
$$|\varepsilon_2| \approx M s_2^2 \approx 2.7 \times 10^{-5}.$$

- (c) La tangente fissa converge se la sua costante asintotica è minore di 1.

$$M_{TF} = \left| 1 - \frac{f'(\xi)}{f'(x_0)} \right| \approx \left| 1 - \frac{f'(-1.1720648)}{f'(-1.7)} \right| = 0.0822 < 1.$$

Il metodo converge. Servono $k = \lceil \frac{5}{-\log_{10}(M_{TF})} \rceil = \lceil 4.6 \rceil = 5$ iterazioni. Partendo invece da $x_0 = -1.7$ si trova $M_{TF} = 1.1 > 1$. Non si ha convergenza.

- (d) Partendo da $x_0 = -4.4656519$, si ottiene $x_1 = 1.1 \times 10^{-9}$ e $x_2 = 0$. Semplicemente il metodo converge a $\xi_2 = 0$ (che ovviamente è anch'essa soluzione dell'equazione data).



2. Al variare di un parametro reale $\alpha \neq 0$ è data la matrice $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- Si dica per quali valori di α converge il metodo di Jacobi, applicato ad un sistema lineare con matrice A (**Suggerimento**: risolvere le disequazioni con il modulo elevando al quadrato).
- Si dica per quali valori di α si può determinare l' ω ottimo del metodo SOR.

- (c) Scegliendo ora $\alpha = 1$, si verifichi la convergenza di Gauss-Seidel e si usino due iterazioni con tale metodo per risolvere $Ax = b$ dove $b = [2 \ 4 \ 3]^T$ (soluzione vera $[1 \ 1 \ 1]^T$), con $x_0 = [1.1 \ 0.925 \ 1.0375]^T$. Usando **la norma euclidea degli ultimi 2 errori** stimare la costante asintotica. È in accordo con i risultati trovati al punto (a)? Si determini quindi l' ω ottimo di SOR.
- (d) Si stimi il numero di iterazioni necessario, con i metodi di Jacobi, Gauss-Seidel, SOR con ω ottimo, per ridurre l'errore iniziale di 12 ordini di grandezza.

Per rispondere ai primi due punti occorre calcolare la matrice di iterazione di Jacobi dato che, per nessun valore di α la matrice è diagonalmente dominante in senso stretto.

$$E_J = - \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(E_J - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 1/4) + \frac{1}{\alpha}(\lambda/1) = -\lambda \left[\lambda^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\alpha} \right) \right].$$

- (a) Perché Jacobi converga occorre che

$$\left| \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2\alpha}} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2\alpha} \right| < 1$$

Elevando al quadrato, come suggerito, si ha

$$\left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2\alpha} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\alpha + 2}{4\alpha} \right)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 + 4\alpha + 4 < 16\alpha^2 \quad \Leftrightarrow \quad 15\alpha^2 - 4\alpha - 4 > 0,$$

disequazione che è risolta per valori esterni all'intervallo delle radici

$$\alpha_{\pm} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{30} = \begin{cases} \alpha_- & = -2/5 \\ \alpha_+ & = 2/3 \end{cases}, \quad \boxed{\alpha < -\frac{2}{5}, \alpha > \frac{2}{3}}.$$

- (b) Perché si possa calcolare l' ω ottimo occorre, inoltre, che ogni autovalore di Jacobi sia reale ovvero che

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\alpha} > 0,$$

disequazione che è ovviamente verificata per $\alpha > 0$. Se $\alpha < 0$, la disequazione è risolta per $\alpha \leq -2$. In conclusione $\boxed{\alpha < -2, \alpha > \frac{2}{3}}$.

- (c) Per $\alpha = 1$ il metodo di Gauss-Seidel converge in quanto (i) Jacobi converge per il punto (a), e (ii) la matrice è tridiagonale. A partire dal punto iniziale dato si ottengono le seguenti due iterazioni con Gauss-Seidel

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.075 \\ 0.94375 \\ 1.0281 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0562 \\ 0.95781 \\ 1.0211 \end{bmatrix}.$$

La costante asintotica si stima come

$$M = \frac{\|e^{(2)}\|}{\|e^{(1)}\|} = \frac{\|x^* - x^{(2)}\|}{\|x^* - x^{(1)}\|} = \frac{0.024469}{0.032626} = 0.75,$$

in accordo con il punto (a) grazie al quale

$$\rho(E_J) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad \Rightarrow \quad \rho(E_S) = \rho(E_J)^2 = \frac{3}{4}.$$

Il valore $\alpha = 1$ consente la determinazione dell' ω ottimo

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(E_S)}} = \frac{4}{3}.$$

- (d) Il raggio spettrale di SOR con ω ottimo è $\rho_{SOR} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.
Il numero di iterazioni richiesto è pertanto per i tre metodi:

$$\begin{aligned} K_J &= \left\lceil \frac{12}{-\log_{10}(\rho(E_J))} \right\rceil = 193 \\ K_S &= \left\lceil \frac{12}{-\log_{10}(\rho(E_J))} \right\rceil = 97 \\ K_{SOR} &= \left\lceil \frac{12}{-\log_{10}(1/3)} \right\rceil = 26 \end{aligned}$$

3. Si vuole calcolare l'integrale $I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} e^{x/2} dx$, $I_V = 3.913645$.

- (a) Determinare il numero minimo di sottointervalli n in cui dividere l'intervallo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ in modo da approssimare I con la formula di Cavalieri-Simpson composta con un errore inferiore in modulo a 5×10^{-3} .
(b) Usando il valore di n trovato al punto precedente si calcoli un'approssimazione I_n di I con la formula di Cavalieri-Simpson composta. Si calcoli l'errore in valore assoluto $E_n = |I_V - I_n|$.
(c) Si determinino ora nodi e pesi in modo che la seguente formula di quadratura

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x) dx \approx w_1 f(-x_1) + w_2 f(x_1) \equiv I_{Gauss}$$

abbia grado di precisione $s = 3$.

- (d) Si spieghi perché la formula trovata ha effettivamente grado di precisione 3. Si approssimi quindi l'integrale I con tale formula e se ne calcoli l'errore $E_{Gauss} = |I_V - I_{Gauss}|$.
(e) Per approssimare I si utilizzi infine quella formula di Newton-Cotes che richiede lo stesso costo computazionale di I_{Gauss} e si confrontino gli errori ottenuti con le due formule.

- (a) Partiamo dalla formula dell'errore di Cavalieri-Simpson composta:

$$E_S = -\frac{(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)}{2880 n^4}$$

che dobbiamo maggiorare in modulo. Maggioriamo dapprima la derivata quarta della funzione integranda

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{1}{16} e^{x/2} \leq \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| = \frac{1}{16} e^{\sqrt{3}/2} = 0.1486.$$

in quanto la derivata quarta è positiva e crescente nell'intervallo d'integrazione. Dobbiamo quindi risolvere la disequazione:

$$|E_S| \leq \frac{(b-a)^5 \cdot 0.1486}{2880 n^4} < 5 \times 10^{-3}.$$

Si trova $n^4 > \frac{(2\sqrt{3})^5 \cdot 0.1486 \cdot 200}{2880} = 5.148 \implies n > 1.506 \implies n = 2$.

- (b) Usiamo la formula di Cavalieri-Simpson composta con $n = 3$:

$$I_2 = \frac{2\sqrt{3}}{12} \left(f(-\sqrt{3}) + 4f(-\sqrt{3}/2) + 2f(0) + 4f(\sqrt{3}/2) + f(\sqrt{3}) \right) = 3.9143929.$$

L'errore $|E_S| = 7.47 \times 10^{-4}$, inferiore alla tolleranza.

- (c) Dobbiamo imporre che la formula sia esatta per tutti i polinomi di grado $s \leq 3$. Impostiamo il sistema (di tre equazioni) in tre incognite:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} &= \int_a^b 1 dx = w_1 + w_2 \\ 0 &= \int_a^b x dx = w_1 x_1 - w_2 x_1 \\ 2\sqrt{3} &= \int_a^b x^2 dx = w_1 x_1^2 + w_2 x_1^2. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione, considerando che deve essere $x_1 \neq 0$, si ha $w_1 = w_2$, che combinata con la prima produce $w_1 = w_2 = \sqrt{3}$. Dalla terza abbiamo $2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}x_1^2$ da cui $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$.

- (d) Il metodo ha ordine di precisione $s = 3$ perchè la formula è esatta anche per polinomi di grado 3 in quanto si ha

$$0 = \int_a^b x^3 = w_1 x_1^3 - w_2 x_1^3.$$

Approssimiamo l'integrale con la nuova formula:

$$I_{Gauss} = \sqrt{3}f(-1) + \sqrt{3}f(1) = 3.90621, \quad |E_{Gauss}| = 7.4 \times 10^{-3}.$$

- (e) La formula di Newton-Cotes da considerare è trapezi perché richiede un numero uguale di valutazioni di funzione (2).

$$I_T = \sqrt{3}(f(-\sqrt{3}) + f(\sqrt{3})) = 4.8464, \quad |E_T| = 0.933.$$

L'errore della formula di Gauss è considerevolmente più piccolo di quello della formula dei trapezi a parità di costo computazionale.

4. Sia nota una funzione $f(x)$ in $n + 1$ punti sperimentali.

- (a) Dare la definizione di polinomio di interpolazione. Ricavare il polinomio di interpolazione di Lagrange che onora la funzione negli $n + 1$ dati sperimentali. Verificare la proprietà di interpolazione.
- (b) Enunciare e dimostrare la formula del resto del polinomio di interpolazione di Lagrange.
- (c) Dati $x_i = i, i = 0, \dots, 4$, tracciare un grafico qualitativo di $F(x)$ (funzione nodale) tra 0 e 4.
- (d) Si vuole interpolare la funzione $f(x) = (x - \pi)^4$ nei nodi definiti in (c) con il polinomio di Lagrange di grado 4. Si valuti l'errore di interpolazione nel punto $\bar{x} = \sqrt{2}$.

(a), (b), (c): si vedano il libro di teoria e/o gli appunti.

(d). L'errore è zero perché la derivata quinta di un polinomio di grado 4 è la funzione nulla.