Prova scritta di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale – CANALI A–B

8 LUGLIO 2022 – TEMA 1

1. Si vuole approssimare il numero π, mediante la soluzione ($\xi = \dfrac{\pi}{4}$) dell'equazione
$$\tan x = 1.$$
   (a) Per risolvere l'equazione $\tan x = 1$ si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton a partire da $x_0 = 0.9$. Si calcoli l'approssimazione di π così ottenuta. Quante cifre significative sono corrette?
   (b) Calcolare sperimentalmente (con gli errori) e analiticamente (con la formula) la costante asintotica verificando la concordanza dei due valori.
   (c) L'equazione data può essere trasormata in $\sin x = \cos x$ e quindi risolta con il metodo di punto fisso
$$x_{k+1} = \arcsin(\cos x_k).$$
   Si scelga arbitrariamente un valore di $x_0 \in [0.8, 1.5]$ e si eseguano 3 iterazioni con il metodo di punto fisso. Giustificare il comportamento ottenuto.
   (d) Si determini infine l'ordine di convergenza e la costante asintotica del metodo di punto fisso
$$x_{k+1} = x_k + \frac{\cos(2x)}{2} \qquad (\xi = \frac{\pi}{4}).$$

2. Si vuole risolvere il sistema lineare $Ax = b$ dove $b = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 9 \end{bmatrix}^T$ e della matrice A si conoscono i fattori della scomposizione LU (senza pivot):
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2.5 & -1 \\ 0 & 0 & 2.4 \end{bmatrix}.$$
   (a) A partire da L e U si ricavi A.
   (b) Si calcoli il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Jacobi.
   (c) A partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.75 & 5 & 2.25 \end{bmatrix}^T$, si eseguano tre iterazioni con il metodo di Jacobi. Usando la norma infinito degli scarti $s^{(3)} = x^{(3)} - x^{(2)}$ e $s^{(1)} = x^{(1)} - x^{(0)}$ si stimi sperimentalmente la costante asintotica. Si valuti quante iterazioni sono necessarie, con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, per avere una riduzione dell'errore iniziale di 10^{-10}.
   (d) Si dica, giustificando la risposta, se è possibile trovare il valore ottimale ω_{opt} del metodo SOR. In caso affermativo lo si calcoli.

3. Dato l'integrale
$$I = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -0.468669, \qquad \text{dove} \quad f(x) = \exp(x) + x^3 + x^2 + x + 1.$$
   (a) Dire in quanti sottointervalli n occorre suddividere l'intervallo $[-2, 0]$ in modo da approssimare l'integrale mediante la formula di Cavalieri Simpson composta con un errore inferiore a 5×10^{-4}.
   (b) Utilizzando il valore di n trovato prima, approssimare I con la formula di Cavalieri Simpson composta, chiamando I_n tale approssimazione e calcolare l'errore $|E_n| = |I - I_n|$.
   (c) Approssimare I con Cavalieri-Simpson usando un numero di sottointervalli pari a $m = \frac{n}{2}$. A partire I_m e I_n si applichi l'estrapolazione di Richardson per trovare un terzo valore (I_R) e quindi calcolare l'errore $E_R = |I - I_R|$.
   (d) Con i valori della funzione utilizzati in (b) si dia un'approssimazione di $f''(-1)$ (valore vero: -3.6321).

4. (a) Sia nota una funzione $f(x)$ in $n+1$ punti sperimentali. Dare la definizione di polinomio di interpolazione.
   (b) Ricavare il polinomio di interpolazione di Lagrange che onora la funzione negli $n+1$ dati sperimentali. Verificare la proprietà di interpolazione.
   (c) Enunciare e dimostrare la formula del resto del polinomio di interpolazione di Lagrange.
   (d) Si vuole interpolare la funzione $f(x) = 0.12x^3 - x^2 + 6x + 2.37$ nei nodi $x_0 = -0.24$, $x_1 = 0.71$, $x_2 = 1.44$, $x_3 = \pi$ con il polinomio di Lagrange di grado 3. Si valuti l'errore di interpolazione nel punto $\bar{x} = 0.88$.

---

1. Cifre decimali:
   1. esercizio 8 cifre decimali per le iterazioni
   2. esercizio 3 cifre decimali per le iterazioni e la costante
   3. esercizio 5 cifre.
2. Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.
3. *Tempo a disposizione 2 ore* 30'. Voti: 8, 8, 8, 8.

Prova scritta di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale – CANALI A–B

8 LUGLIO 2022 – TEMA 2

1. Si vuole approssimare il numero π, mediante la soluzione ($\xi = \frac{\pi}{4}$) dell'equazione
$$\tan x = 1.$$
   (a) Per risolvere l'equazione $\tan x = 1$ si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton a partire da $x_0 = 0.65$. Si calcoli l'approssimazione di π così ottenuta. Quante cifre significative sono corrette?
   (b) Calcolare sperimentalmente (con gli errori) e analiticamente (con la formula) la costante asintotica verificando la concordanza dei due valori.
   (c) L'equazione data può essere trasormata in $\sin x = \cos x$ e quindi risolta con il metodo di punto fisso
$$x_{k+1} = \arcsin(\cos x_k).$$
   Si scelga arbitrariamente un valore di $x_0 \in [0.8, 1.5]$ e si eseguano 3 iterazioni con il metodo di punto fisso. Giustificare il comportamento ottenuto.
   (d) Si determini infine l'ordine di convergenza e la costante asintotica del metodo di punto fisso
$$x_{k+1} = x_k + \frac{\cos(2x)}{2} \qquad (\xi = \frac{\pi}{4}).$$

2. Si vuole risolvere il sistema lineare $Ax = b$ dove $b = \begin{bmatrix}-1 & 10 & 9\end{bmatrix}^T$ e della matrice A si conoscono i fattori della scomposizione LU (senza pivot):
$$L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.5 & 1 & 0\\ 0 & 0.4 & 1\end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2.5 & -1\\ 0 & 0 & 2.4\end{bmatrix}.$$
   (a) A partire da L e U si ricavi A.
   (b) Si calcoli il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Jacobi.
   (c) A partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = \begin{bmatrix}1.75 & 5 & 2.25\end{bmatrix}^T$, si eseguano tre iterazioni con il metodo di Jacobi. Usando la norma infinito degli scarti $s^{(3)} = x^{(3)} - x^{(2)}$ e $s^{(1)} = x^{(1)} - x^{(0)}$ si stimi sperimentalmente la costante asintotica. Si valuti quante iterazioni sono necessarie, con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, per avere una riduzione dell'errore iniziale di 10^{-10}.
   (d) Si dica, giustificando la risposta, se è possibile trovare il valore ottimale ω_{opt} del metodo SOR. In caso affermativo lo si calcoli.

3. Dato l'integrale
$$I = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -5.802002, \qquad \text{dove} \quad f(x) = \exp(x) + x^3 - x^2 + x + 1.$$
   (a) Dire in quanti sottointervalli n occorre suddividere l'intervallo $[-2, 0]$ in modo da approssimare l'integrale mediante la formula di Cavalieri Simpson composta con un errore inferiore a 5×10^{-4}.
   (b) Utilizzando il valore di n trovato prima, approssimare I con la formula di Cavalieri Simpson composta, chiamando I_n tale approssimazione e calcolare l'errore $|E_n| = |I - I_n|$.
   (c) Approssimare I con Cavalieri-Simpson usando un numero di sottointervalli pari a $m = \frac{n}{2}$. A partire I_m e I_n si applichi l'estrapolazione di Richardson per trovare un terzo valore (I_R) e quindi calcolare l'errore $E_R = |I - I_R|$.
   (d) Con i valori della funzione utilizzati in (b) si dia un'approssimazione di $f''(-1)$ (valore vero: -7.6321).

4. (a) Sia nota una funzione $f(x)$ in $n+1$ punti sperimentali. Dare la definizione di polinomio di interpolazione.
   (b) Ricavare il polinomio di interpolazione di Lagrange che onora la funzione negli $n + 1$ dati sperimentali. Verificare la proprietà di interpolazione.
   (c) Enunciare e dimostrare la formula del resto del polinomio di interpolazione di Lagrange.
   (d) Si vuole interpolare la funzione $f(x) = \sqrt{3}x^3 - \pi x^2 + 3.4x + 2$ nei nodi $x_0 = 0.2,\ x_1 = 0.7,\ x_2 = 1.4,\ x_3 = 2.2$ con il polinomio di Lagrange di grado 3. Si valuti l'errore di interpolazione nel punto $\bar{x} = 0.94$.

---

1. Cifre decimali:
   1. esercizio 8 cifre decimali per le iterazioni
   2. esercizio 3 cifre decimali per le iterazioni e la costante
   3. esercizio 5 cifre.
2. Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.
3. *Tempo a disposizione 2 ore* 30'. Voti: 8, 8, 8, 8.