

1. Data l'equazione

$$x = 2 \arctan x - \ln(1 + x^2) + 1.$$

- Si mostri che ammette (almeno) una soluzione in $[1, 3]$.
- Si mostri che il metodo di punto fisso $x_{k+1} = 2 \arctan(x_k) - \ln(1 + x_k^2) + 1$ converge per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in [1, 3]$.
- A partire dal punto iniziale $x_0 = 2$ si calcolino 3 iterazioni con il precedente metodo di punto fisso. Stimare la costante asintotica e l'errore all'ultima iterazione.
- Sempre a partire dal punto iniziale $x_0 = 2$ si esegua un'iterazione con il metodo di Aitken applicato al precedente metodo di punto fisso. Utilizzando $\xi = 1.7144972$ si stimi la costante asintotica tramite gli errori. Dopo quante iterazioni l'errore con tale metodo raggiungerà la precisione di macchina? Giustificare.

2. Si determini il valore $\alpha \geq 0$ nella matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \alpha \\ -1 & 3 & 3 \\ \alpha & 2 & \alpha + 3 \end{bmatrix}$ in modo che la sua norma

di Frobenius¹ sia uguale a 7. Una volta determinato α si intende risolvere il sistema $Ax = b$ dove $b = [-9 \ 17 \ 14]^T$, $x_v = [-2 \ 1 \ 4]^T$.

- Dimostrare che il metodo di Gauss-Seidel converge alla soluzione del sistema.
- Calcolare due iterazioni con tale metodo a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = [-2.2 \ 1.1 \ 3.9]^T$.
- Mediante gli errori stimare la costante asintotica del metodo.
- Dire perché è possibile determinare l'omega ottimo del metodo SOR e quindi calcolarlo. Stimare la velocità di convergenza di SOR con ω_{opt} e il numero di iterazioni necessario, con tale metodo, per ridurre l'errore iniziale di 10^{-10} .

3. La funzione $f(x) = \exp(-2x) + x^2$ è nota nei punti $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 2$.

- Costruire la tabella delle differenze divise relativa alla funzione e ai punti dati.
- Calcolare il polinomio interpolatore di Newton $P_3(x)$ e valutarlo nel punto $\bar{x} = 1.5$.
- Calcolare l'errore commesso $|E(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - P_3(\bar{x})|$ e maggiorare l'errore nel punto $\bar{x}$ con la formula del resto del polinomio interpolatore di Lagrange.
- Utilizzando i dati sperimentali e l'ulteriore dato $(\bar{x}, P_3(\bar{x}))$, approssimare $\int_0^2 f(x)dx$ (valore vero $I_v = 3.15751$) e calcolare l'errore $|E_S| = |I_s - I_v|$ con la formula di Cavalieri Simpson composta.
- Procedere come nel punto (d) utilizzando però il dato $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Confrontare l'errore con l'errore ottenuto in (d) e commentare il risultato.

4. Formule di Newton Cotes per l'approssimazione di $I = \int_a^b f(x) dx$.

- Ricavare le formule nel caso generale.
- Ricavare la formula di Richardson a partire da due approssimazioni dell'integrale mediante Cavalieri-Simpson su n (I_n) e $2n$ (I_{2n}) sottointervalli. Generalizzare al caso I_n e I_{kn} .
- A partire dalla formula dell'errore di trapezi semplice ricavare la formula dell'errore della formula dei trapezi composta.
- Ricavare la formula (con relativo errore) di approssimazione numerica della derivata seconda di f in un punto x noti i valori $f(x-h), f(x), f(x+h)$.

¹ $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$