Prova scritta di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale (Canale A)

PROF. L. BERGAMASCHI 23 LUGLIO 2019 **TEMA N. 1**

1. Sia data l'equazione $e^x + x^2 - 2 - \sin x = 0$.

   (a) Mostrare che esiste un'unica soluzione ξ dell'equazione in $[0.5, 1.5]$. Calcolare quindi il numero k di iterazioni necessario per approssimare ξ con il metodo di bisezione per ottenere $|\varepsilon_k| < 10^{-11}$.

   (b) Si approssimi ξ con il metodo di Newton-Raphson e punto iniziale $x_0 = 1$. Utilizzare un test sullo scarto con tolleranza $\text{TOL}= 2 \times 10^{-3}$. Stimare il fattore di convergenza e dire se tutte le cifre dell'ultima iterazione riportate sono corrette.

   (c) Si considerino ora i due metodi: punto fisso $x_{k+1} = \ln\left(2 + \sin x_k - x_k^2\right)$ e il metodo della tangente fissa di punto iniziale $x_0 = 1$. Utilizzando come soluzione "vera" la migliore approssimazione ottenuta con il metodo di Newton, si verifichi la convergenza di entrambi i metodi. Quale dei due metodi convergerà più rapidamente alla soluzione? Giustificare la risposta.

2. Al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si definisce a seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & 5 & (\alpha-\beta)^2 \\ 5 & 5\beta & 0.5 \\ \alpha - 2 & 0.5 & 2\alpha \end{bmatrix}.$$

   (a) Si determini la coppia di valori (α, β) per cui la matrice è tridiagonale.

   (b) Si consideri la matrice con i valori determinati al punto (a) e si **risolva il sistema** $Ax = b$ con $b = [14\ 26\ 9]^T$ utilizzando **il metodo di eliminazione di Gauss con pivot parziale**. Si forniscano le matrici L, U, P della fattorizzazione.

   (c) Sempre considerando la matrice con i valori precedenti di α, β si ricavi il valore di ω_{opt} del metodo SOR, giustificando perché ciò è possibile.

   Dato l'integrale

$$I = \int_1^4 \left(\frac{x^3}{2} - x \ln x + \frac{\cos x}{5} \right) dx, \qquad \text{valore vero} \qquad I = 24.2150.$$

3. (a) Determinare il numero di sottointervalli n in cui suddividere l'intervallo $[1, 4]$ in modo da ottenere un valore approssimato dell'integrale mediante la formula di Cavalieri-Simpson composta con un errore **relativo** (in modulo) inferiore a 10^{-4}.

   (b) Si approssimi l'integrale impiegando la formula di Cavalieri Simpson composta con il valore di n appena calcolato e **4 cifre decimali**. Si calcoli l'errore relativo ottenuto.

   (c) Si approssimi l'integrale con la formula di Cavalieri Simpson semplice.

   (d) Fornire quindi una terza approssimazione dell'integrale utilizzando l'estrapolazione di Richardson. Calcolare l'errore relativo.

4. Metodi iterativi stazionari.

   (a) Definire il raggio spettrale di una matrice A, $\rho(A)$. Calcolare $\rho(A)$ per una matrice A avente autovalori $\{-2, -0.5, 1 - i, 1 + i, 1.5\}$. Dimostrare che un metodo iterativo per sistemi lineari è convergente per ogni scelta del vettore iniziale $x^{(0)}$ se e solo se $\rho(E) < 1$.

   (b) Relazione errore/scarto.

   (c) Enunciare e dimostrare il teorema di Kahan per il metodo SOR.

   (d) Sia A tridiagonale. Enunciare la relazione tra i fattori di convergenza di Jacobi Seidel per tale matrice. Ricavare la relazione che lega le velocità di convergenza dei due metodi.

---

*Tempo a disposizione: 2 ore, 30 minuti. (Voti: 8 * ones(4,1)).*
Cifre decimali: **Esercizio 1:** *6 per le iterazioni;* **Esercizio 2:** *4 per Gauss-Seidel;* **Esercizio 3:** *4.*
Giustificare i passaggi non ovvi. Consegnare **solo** il foglio di bella e questo foglio con la traccia.