Prova scritta di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale – CANALI A–B

L. BERGAMASCHI – M. FRIGO

24 GIUGNO 2022 – TEMA 1

1. Data l'equazione
$$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 27x = 0$$
   (a) Si determini la molteplicità della soluzione $\xi = 3$
   (b) Si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton a partire da $x_0 = 3.5$. Si stimi la costante asintotica del metodo usando gli errori. È in accordo con la teoria? Giustificare.
   (c) Si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton modificato a partire da $x_0 = 5$. Si stimi la costante asintotica del metodo usando gli errori e quindi si stimi l'errore a partire dallo scarto s_3. È una stima attendibile?
   (d) Si dimostri che il metodo di Newton-Raphson modificato, applicato all'equazione
$$(x - \beta)^s = 0, \ s \in \mathbb{N}, \ \beta \in \mathbb{R}.$$
   converge in una sola iterazione, indipendentemente dal punto iniziale.

2. Dato il sistema lineare $Ax = b$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$
   (a) Si calcoli la fattorizzazione di Cholesky della matrice A.
   (b) Utilizzando il fattore di Cholesky, si calcoli $\det A$ e si risolva il sistema lineare.
   (c) Si dica perché il metodo di Gauss-Seidel converge se applicato alla soluzione del sistema al punto precedente.
   (d) Si valutino la costante asintotica e la velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel. Si dica perché è possibile calcolare il valore ottimale di ω di SOR e quindi calcolarlo.

3. Si vuole interpolare la funzione $f(x) = \ln(x + 1) + \dfrac{x^4}{4}$ nei nodi $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.75, x_3 = 2$
   (a) Si scriva la tabella delle differenze divise relative ai dati del problema.
   (b) Si scriva il polinomio di interpolazione di Newton alle differenze divise.
   (c) Detto $\bar{x} = 1.5$ si valuti $P(\bar{x})$ e l'errore di interpolazione $|E| = |f(\bar{x}) - P(\bar{x})|$. Si dia quindi una maggiorazione dell'errore nel punto $\bar{x}$.
   (d) Si approssimi $I = \displaystyle\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = 2.4595$ con la formula dei trapezi composta usando i 4 dati iniziali. (Si osservi che i punti **non** sono equispaziati). Si calcoli l'errore **relativo** commesso.
   (e) Si approssimi I con la formula dei trapezi composta usando, oltre ai 4 dati iniziali, il punto $(\bar{x}, P(\bar{x}))$. Si calcoli l'errore **relativo** commesso.

4. Formule di Newton Cotes per l'approssimazione di $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
   (a) Ricavare le formule nel caso generale.
   (b) Ricavare geometricamente il metodo dei trapezi e quindi la relativa formula dell'errore.
   (c) Ricavare la formula di Richardson a partire da due approssimazioni dell'integrale mediante Cavalieri-Simpson su n (I_n) e $3n$ (I_{3n}) sottointervalli.
   (d) Dato l'integrale
$$I = \int_{-3}^{3} \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}x - 4\pi \,\mathrm{dx}$$
   si calcoli l'errore che si ottiene nell'approssimare I con la formula dei trapezi **semplice**.

---

1. Cifre decimali:

	1. esercizio	7 cifre decimali per le iterazioni
	2. esercizio	aritmetica esatta
	3. esercizio	3 cifre.

2. Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.
3. *Tempo a disposizione 2 ore* 30'. Voti: 8, 8, 8, 8.

Prova scritta di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale – CANALI A–B

L. BERGAMASCHI – M. FRIGO

24 GIUGNO 2022 – TEMA 2

1. Data l'equazione
$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = 0$$
   (a) Si determini la molteplicità della soluzione $\xi = 2$
   (b) Si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton a partire da $x_0 = 2.5$. Si stimi la costante asintotica del metodo usando gli errori. È in accordo con la teoria? Giustificare.
   (c) Si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton modificato a partire da $x_0 = 4$. Si stimi la costante asintotica del metodo usando gli errori e quindi si stimi l'errore a partire dallo scarto s_3. È una stima attendibile?
   (d) Si dimostri che il metodo di Newton-Raphson modificato, applicato all'equazione
   $$(x - \gamma)^q = 0, \; q \in \mathbb{N}, \; \gamma \in \mathbb{R}.$$
   converge in una sola iterazione, indipendentemente dal punto iniziale.
2. Dato il sistema lineare $Ax = b$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix},$$
   (a) Si calcoli la fattorizzazione di Cholesky della matrice A.
   (b) Utilizzando il fattore di Cholesky, si calcoli $\det A$ e si risolva il sistema lineare.
   (c) Si dica perché il metodo di Gauss-Seidel converge se applicato alla soluzione del sistema al punto precedente.
   (d) Si valutino la costante asintotica e la velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel. Si dica perché è possibile calcolare il valore ottimale di ω di SOR e quindi calcolarlo.
3. Si vuole interpolare la funzione $f(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x^4}{4}$ nei nodi $x_0 = 0.5, x_1 = 0.75, x_2 = 1.25, x_3 = 1.5$.
   (a) Si scriva la tabella delle differenze divise relative ai dati del problema.
   (b) Si scriva il polinomio di interpolazione di Newton alle differenze divise.
   (c) Detto $\bar{x} = 1$ si valuti $P(\bar{x})$ e l'errore di interpolazione $|E| = |f(\bar{x}) - P(\bar{x})|$. Si dia quindi una maggiorazione dell'errore nel punto $\bar{x}$.
   (d) Si approssimi $I = \displaystyle\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = 1.0607$ con la formula dei trapezi composta usando i 4 dati iniziali. (Si osservi che i punti **non** sono equispaziati). Si calcoli l'errore **relativo** commesso.
   (e) Si approssimi I con la formula dei trapezi composta usando, oltre ai 4 dati iniziali, il punto $(\bar{x}, P(\bar{x}))$. Si calcoli l'errore **relativo** commesso.
4. Formule di Newton Cotes per l'approssimazione di $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
   (a) Ricavare le formule nel caso generale.
   (b) Ricavare geometricamente il metodo dei trapezi e quindi la relativa formula dell'errore.
   (c) Ricavare la formula di Richardson a partire da due approssimazioni dell'integrale mediante Cavalieri-Simpson su n (I_n) e $4n$ (I_{4n}) sottointervalli.
   (d) Dato l'integrale
   $$I = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{3}x - 4\pi \,\mathrm{dx}$$
   si calcoli l'errore che si ottiene nell'approssimare I con la formula dei trapezi **semplice**.

---

1. Cifre decimali:

	1. esercizio	7 cifre decimali per le iterazioni
	2. esercizio	aritmetica esatta
	3. esercizio	3 cifre.

2. Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.
3. *Tempo a disposizione 2 ore* 30'. Voti: 8, 8, 8, 8.

Prova scritta di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale – CANALI A–B

L. BERGAMASCHI – M. FRIGO

24 GIUGNO 2022 – TEMA 3

1. Data l'equazione
$$x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 27x = 0$$
   (a) Si determini la molteplicità della soluzione $\xi = -3$
   (b) Si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton a partire da $x_0 = -2.5$. Si stimi la costante asintotica del metodo usando gli errori. È in accordo con la teoria? Giustificare.
   (c) Si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton modificato a partire da $x_0 = -2$. Si stimi la costante asintotica del metodo usando gli errori e quindi si stimi l'errore a partire dallo scarto s_3. È una stima attendibile?
   (d) Si dimostri che il metodo di Newton-Raphson modificato, applicato all'equazione
$$(x - \delta)^q = 0, \ q \in \mathbb{N}, \ \delta \in \mathbb{R}.$$
   converge in una sola iterazione, indipendentemente dal punto iniziale.
2. Dato il sistema lineare $Ax = b$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix},$$
   (a) Si calcoli la fattorizzazione di Cholesky della matrice A.
   (b) Utilizzando il fattore di Cholesky, si calcoli $\det A$ e si risolva il sistema lineare.
   (c) Si dica perché il metodo di Gauss-Seidel converge se applicato alla soluzione del sistema al punto precedente.
   (d) Si valutino la costante asintotica e la velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel. Si dica perché è possibile calcolare il valore ottimale di ω di SOR e quindi calcolarlo.
3. Si vuole interpolare la funzione $f(x) = \ln(x + 1) + \dfrac{x^4}{4}$ nei nodi $x_0 = 0.25, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.25$
   (a) Si scriva la tabella delle differenze divise relative ai dati del problema.
   (b) Si scriva il polinomio di interpolazione di Newton alle differenze divise.
   (c) Detto $\bar{x} = 0.75$ si valuti $P(\bar{x})$ e l'errore di interpolazione $|E| = |f(\bar{x}) - P(\bar{x})|$. Si dia quindi una maggiorazione dell'errore nel punto $\bar{x}$.
   (d) Si approssimi $I = \displaystyle\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = 0.6982$ con la formula dei trapezi composta usando i 4 dati iniziali. (Si osservi che i punti **non** sono equispaziati). Si calcoli l'errore **relativo** commesso.
   (e) Si approssimi I con la formula dei trapezi composta usando, oltre ai 4 dati iniziali, il punto $(\bar{x}, P(\bar{x}))$. Si calcoli l'errore **relativo** commesso.
4. Formule di Newton Cotes per l'approssimazione di $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
   (a) Ricavare le formule nel caso generale.
   (b) Ricavare geometricamente il metodo dei trapezi e quindi la relativa formula dell'errore.
   (c) Ricavare la formula di Richardson a partire da due approssimazioni dell'integrale mediante Cavalieri-Simpson su n (I_n) e $3n$ (I_{3n}) sottointervalli.
   (d) Dato l'integrale
$$I = \int_0^3 12x^2 - \sqrt{3}x - 4\pi \,\mathrm{dx}$$
   si calcoli l'errore che si ottiene nell'approssimare I con la formula dei trapezi **semplice**.

---

1. Cifre decimali:

	1. esercizio	7 cifre decimali per le iterazioni
	2. esercizio	aritmetica esatta
	3. esercizio	3 cifre.

2. Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.
3. *Tempo a disposizione 2 ore* 30'. Voti: 8, 8, 8, 8.

Prova scritta di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale – CANALI A–B

L. BERGAMASCHI – M. FRIGO

24 GIUGNO 2022 – TEMA 4

1. Data l'equazione
$$x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x = 0$$
   (a) Si determini la molteplicità della soluzione $\xi = -2$
   (b) Si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton a partire da $x_0 = -1.5$. Si stimi la costante asintotica del metodo usando gli errori. È in accordo con la teoria? Giustificare.
   (c) Si eseguano tre iterazioni con il metodo di Newton modificato a partire da $x_0 = -1$. Si stimi la costante asintotica del metodo usando gli errori e quindi si stimi l'errore a partire dallo scarto s_3. È una stima attendibile?
   (d) Si dimostri che il metodo di Newton-Raphson modificato, applicato all'equazione
$$(x - \alpha)^p = 0, \ p \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$
   converge in una sola iterazione, indipendentemente dal punto iniziale.

2. Dato il sistema lineare $Ax = b$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix},$$
   (a) Si calcoli la fattorizzazione di Cholesky della matrice A.
   (b) Utilizzando il fattore di Cholesky, si calcoli $\det A$ e si risolva il sistema lineare.
   (c) Si dica perché il metodo di Gauss-Seidel converge se applicato alla soluzione del sistema al punto precedente.
   (d) Si valutino la costante asintotica e la velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel. Si dica perché è possibile calcolare il valore ottimale di ω di SOR e quindi calcolarlo.

3. Si vuole interpolare la funzione $f(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x^4}{4}$ nei nodi $x_0 = 0.75, x_1 = 1, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75$
   (a) Si scriva la tabella delle differenze divise relative ai dati del problema.
   (b) Si scriva il polinomio di interpolazione di Newton alle differenze divise.
   (c) Detto $\bar{x} = 1.25$ si valuti $P(\bar{x})$ e l'errore di interpolazione $|E| = |f(\bar{x}) - P(\bar{x})|$. Si dia quindi una maggiorazione dell'errore nel punto $\bar{x}$.
   (d) Si approssimi $I = \displaystyle\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = 1.6114$ con la formula dei trapezi composta usando i 4 dati iniziali. (Si osservi che i punti **non** sono equispaziati). Si calcoli l'errore **relativo** commesso.
   (e) Si approssimi I con la formula dei trapezi composta usando, oltre ai 4 dati iniziali, il punto $(\bar{x}, P(\bar{x}))$. Si calcoli l'errore **relativo** commesso.

4. Formule di Newton Cotes per l'approssimazione di $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
   (a) Ricavare le formule nel caso generale.
   (b) Ricavare geometricamente il metodo dei trapezi e quindi la relativa formula dell'errore.
   (c) Ricavare la formula di Richardson a partire da due approssimazioni dell'integrale mediante Cavalieri-Simpson su n (I_n) e $4n$ (I_{4n}) sottointervalli.
   (d) Dato l'integrale
$$I = \int_{-1}^{2} 6x^2 - \sqrt{5}x - 3\pi \,\mathrm{dx}$$
   si calcoli l'errore che si ottiene nell'approssimare I con la formula dei trapezi **semplice**.

---

1. Cifre decimali:

	1. esercizio	7 cifre decimali per le iterazioni
	2. esercizio	aritmetica esatta
	3. esercizio	3 cifre.

2. Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.
3. *Tempo a disposizione 2 ore* 30'. Voti: 8, 8, 8, 8.