1. Data l'equazione

$$x^3 - e^x = 0$$

- (a) Si dimostri esistenza e unicità della soluzione in $[1.5, 2]$.
- (b) A partire dal punto iniziale $x_0 = 1.5$ si esegua un numero sufficiente di iterazioni con il metodo di Newton-Raphson per approssimare la soluzione con **un errore**¹ inferiore in modulo a 10^{-8} . **Si consideri come soluzione vera ξ l'ultimo valore trovato.**
- (c) Senza eseguire iterazioni, si dica per quali valori del punto iniziale il metodo di punto fisso $x_{k+1} = e^{x_k/3}$ converge alla soluzione; si calcoli quindi la costante asintotica M del metodo. Provare teoricamente che $M = \frac{\xi}{3}$.
- (d) Si calcoli un'iterazione del metodo di Aitken applicato al metodo definito al punto c), a partire da $x_0 = 1.85$. Usando gli errori si stimi la costante asintotica.
2. Il metodo SOR applicato ad un certo sistema $Ax = b$ dove A è tridiagonale, produce, utilizzando ω ottimo, i seguenti errori (in norma euclidea) alle iterazioni 23 e 21, rispettivamente:

$$\varepsilon_{23} = 1.363 \times 10^{-11}, \quad \varepsilon_{21} = 1.449 \times 10^{-10}.$$

- (a) Con i soli dati forniti, stimare la costante asintotica del metodo SOR e, quindi, stimare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

Facoltativo: ricavare una relazione che lega il raggio spettrale di Gauss-Seidel al raggio spettrale di SOR con ω ottimo, per una generica matrice biciclica e coerentemente ordinata.

- (b) Sapendo ora che

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \text{soluzione vera } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = [0.86396 \quad 1.09825 \quad 0.93450]^T$ si esegua 1 iterazione con il metodo di Gauss-Seidel. Usando la norma infinito degli errori, si stimi sperimentalmente la costante asintotica e la si confronti con il risultato del punto a).

- (c) Sapendo che $\det A = 15$ e che un autovalore di A è uguale a 3, determinare gli altri due autovalori di A (usare anche la traccia di A).

segue $\longrightarrow$

¹stimato in funzione dello scarto e della costante asintotica

3. Della funzione $f(x) = \sin x + x^4 - \cos x$, nota nei nodi $x_i = ih, h = 0.2, i = 0, 1, 2, 3, 4$, si vuole calcolare

$$I = \int_0^{0.8} f(x) dx, \quad \text{valore vero } I = -0.34853.$$

Usando tutti e soli i dati si approssimi l'integrale

- (a) con la formula dei trapezi composta (I_T). Valutare l'errore commesso (in valore assoluto).
 - (b) con la formula di Cavalieri-Simpson composta (I_S). Valutare l'errore commesso (in valore assoluto) e confrontarlo con la maggiorazione dell'errore della formula di Cavalieri-Simpson.
 - (c) Usando I_T e I_S calcolare l'approssimazione dell'integrale con la formula dei trapezi composta e la metà del numero di intervalli usati in (a). (*Suggerimento*: si ricordi l'estrapolazione di Richardson applicata ai trapezi). Valutare l'errore commesso, in valore assoluto.
 - (d) Sempre a partire dai dati, fornire la migliore approssimazione di $f'(0.5)$ e valutare l'errore commesso. È in accordo con la teoria? Giustificare.
4. Metodo di punto fisso per la soluzione dell'equazione $x = g(x)$.
- (a) Dare un'interpretazione geometrica del metodo nei casi di (i) convergenza monotona (ii) convergenza oscillante.
 - (b) Enunciare e dimostrare la condizione di convergenza del metodo in un intervallo.
 - (c) Siano $g'(\xi) = 0$ e $g''(\xi) \neq 0$, ricavare ordine e fattore di convergenza del metodo.
 - (d) Ricavare la relazione errore-scarto del metodo di punto fisso nel caso generale ($g'(\xi) \neq 0$).
 - (e) Per quali valori del punto iniziale il metodo $x_{k+1} = \tan x_k$ converge alla soluzione ($\xi = 0$)?

Nota Bene.

1. Cifre decimali:

- 1. esercizio: 7 cifre decimali per le iterazioni
- 2. esercizio: punto (a) 3 cifre; iterazioni di Gauss-Seidel 4 cifre
- 3. esercizio: 5 cifre.

2. Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.

3. *Tempo a disposizione 2 ore 30'*. Voti: 8, 8, 8, 8.

1. Data l'equazione

$$x^4 - e^x = 0$$

- (a) Si dimostri esistenza e unicità della soluzione in $[1, 2]$.
- (b) A partire dal punto iniziale $x_0 = 1.6$ si esegua un numero sufficiente di iterazioni con il metodo di Newton-Raphson per approssimare la soluzione con **un errore**² inferiore in modulo a 10^{-7} . **Si consideri come soluzione vera ξ l'ultimo valore trovato.**
- (c) Senza eseguire iterazioni, si dica per quali valori del punto iniziale il metodo di punto fisso $x_{k+1} = e^{x_k/4}$ converge alla soluzione; si calcoli quindi la costante asintotica M del metodo. Provare teoricamente che $M = \frac{\xi}{4}$.
- (d) Si calcoli un'iterazione del metodo di Aitken applicato al metodo definito al punto c), a partire da $x_0 = 1.42$. Usando gli errori si stimi la costante asintotica.
2. Il metodo SOR applicato ad un certo sistema $Ax = b$ dove A è tridiagonale, produce, utilizzando ω ottimo, i seguenti errori (in norma euclidea) alle iterazioni 25 e 23, rispettivamente:

$$\varepsilon_{25} = 1.739 \times 10^{-11}, \quad \varepsilon_{23} = 1.684 \times 10^{-10}.$$

- (a) Con i soli dati forniti, stimare la costante asintotica del metodo SOR e, quindi, stimare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

Facoltativo: ricavare una relazione che lega il raggio spettrale di Gauss-Seidel al raggio spettrale di SOR con ω ottimo, per una generica matrice biciclica e coerentemente ordinata.

- (b) Sapendo ora che

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \text{soluzione vera } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = [1.13604 \quad 2.90175 \quad 1.06550]^T$ si esegua 1 iterazione con il metodo di Gauss-Seidel. Usando la norma infinito degli errori, si stimi sperimentalmente la costante asintotica e la si confronti con il risultato del punto a).

- (c) Sapendo che $\det A = 15$ e che un autovalore di A è uguale a 3, determinare gli altri due autovalori di A (usare anche la traccia di A).

segue $\longrightarrow$

²stimato in funzione dello scarto e della costante asintotica

3. Della funzione $f(x) = \sin x + x^4 + \cos x$, nota nei nodi $x_i = 0.2 + ih, h = 0.2, i = 0, 1, 2, 3, 4$, si vuole calcolare

$$I = \int_{0.2}^1 f(x) dx, \quad \text{valore vero } I = 1.28250.$$

Usando tutti e soli i dati si approssimi l'integrale

- con la formula dei trapezi composta (I_T). Valutare l'errore commesso (in valore assoluto).
 - con la formula di Cavalieri-Simpson composta (I_S). Valutare l'errore commesso (in valore assoluto) e confrontarlo con la maggiorazione dell'errore della formula di Cavalieri-Simpson.
 - Usando I_T e I_S calcolare l'approssimazione dell'integrale con la formula dei trapezi composta e la metà del numero di intervalli usati in (a). (*Suggerimento*: si ricordi l'estrapolazione di Richardson applicata ai trapezi). Valutare l'errore commesso, in valore assoluto.
 - Sempre a partire dai dati, fornire la migliore approssimazione di $f'(0.7)$ e valutare l'errore commesso. È in accordo con la teoria? Giustificare.
4. Metodo di punto fisso per la soluzione dell'equazione $x = g(x)$.
- Dare un'interpretazione geometrica del metodo nei casi di (i) convergenza monotona (ii) convergenza oscillante.
 - Enunciare e dimostrare la condizione di convergenza del metodo in un intervallo.
 - Siano $g'(\xi) = 0$ e $g''(\xi) \neq 0$, ricavare ordine e fattore di convergenza del metodo.
 - Ricavare la relazione errore-scarto del metodo di punto fisso nel caso generale ($g'(\xi) \neq 0$).
 - Per quali valori del punto iniziale il metodo $x_{k+1} = \tan x_k$ converge alla soluzione ($\xi = 0$)?

Nota Bene.

- Cifre decimali:
 - 1. esercizio: 7 cifre decimali per le iterazioni
 - 2. esercizio: punto (a) 3 cifre; iterazioni di Gauss-Seidel 4 cifre
 - 3. esercizio: 5 cifre.
- Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.
- Tempo a disposizione 2 ore 30'*. Voti: 8, 8, 8, 8.

1. Data l'equazione

$$x^5 - e^x = 0$$

- (a) Si dimostri esistenza e unicità della soluzione in $[1, 1.5]$.
- (b) A partire dal punto iniziale $x_0 = 1.5$ si esegua un numero sufficiente di iterazioni con il metodo di Newton-Raphson per approssimare la soluzione con **un errore**³ inferiore in modulo a 10^{-7} . **Si consideri come soluzione vera ξ l'ultimo valore trovato.**
- (c) Senza eseguire iterazioni, si dica per quali valori del punto iniziale il metodo di punto fisso $x_{k+1} = e^{x_k/5}$ converge alla soluzione; si calcoli quindi la costante asintotica M del metodo. Provare teoricamente che $M = \frac{\xi}{5}$.
- (d) Si calcoli un'iterazione del metodo di Aitken applicato al metodo definito al punto c), a partire da $x_0 = 1.28$. Usando gli errori si stimi la costante asintotica.
2. Il metodo SOR applicato ad un certo sistema $Ax = b$ dove A è tridiagonale, produce, utilizzando ω ottimo, i seguenti errori (in norma euclidea) alle iterazioni 19 e 17, rispettivamente:

$$\varepsilon_{19} = 1.106 \times 10^{-10}, \quad \varepsilon_{17} = 1.490 \times 10^{-9}.$$

- (a) Con i soli dati forniti, stimare la costante asintotica del metodo SOR e, quindi, stimare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

Facoltativo: ricavare una relazione che lega il raggio spettrale di Gauss-Seidel al raggio spettrale di SOR con ω ottimo, per una generica matrice biciclica e coerentemente ordinata.

- (b) Sapendo ora che

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \text{soluzione vera } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = [0.90123 \quad 1.06584 \quad 0.96708]^T$ si esegua 1 iterazione con il metodo di Gauss-Seidel. Usando la norma infinito degli errori, si stimi sperimentalmente la costante asintotica e la si confronti con il risultato del punto a).

- (c) Sapendo che due autovalori di A sono $\lambda_1 = 0.7560818$ e $\lambda_2 = 3.7270088$, calcolare $\det A$ (usare anche la traccia di A).

segue $\longrightarrow$

³stimato in funzione dello scarto e della costante asintotica

3. Della funzione $f(x) = \sin x + x^4 + \cos x$, nota nei nodi $x_i = ih, h = 0.2, i = 0, 1, 2, 3, 4$, si vuole calcolare

$$I = \int_0^{0.8} f(x) dx, \quad \text{valore vero } I = 1.08619.$$

Usando tutti e soli i dati si approssimi l'integrale

- (a) con la formula dei trapezi composta (I_T). Valutare l'errore commesso (in valore assoluto).
 - (b) con la formula di Cavalieri-Simpson composta (I_S). Valutare l'errore commesso (in valore assoluto) e confrontarlo con la maggiorazione dell'errore della formula di Cavalieri-Simpson.
 - (c) Usando I_T e I_S calcolare l'approssimazione dell'integrale con la formula dei trapezi composta e la metà del numero di intervalli usati in (a). (*Suggerimento*: si ricordi l'estrapolazione di Richardson applicata ai trapezi). Valutare l'errore commesso, in valore assoluto.
 - (d) Sempre a partire dai dati, fornire la migliore approssimazione di $f'(0.3)$ e valutare l'errore commesso. È in accordo con la teoria? Giustificare.
4. Metodo di punto fisso per la soluzione dell'equazione $x = g(x)$.
- (a) Dare un'interpretazione geometrica del metodo nei casi di (i) convergenza monotona (ii) convergenza oscillante.
 - (b) Enunciare e dimostrare la condizione di convergenza del metodo in un intervallo.
 - (c) Siano $g'(\xi) = 0$ e $g''(\xi) \neq 0$, ricavare ordine e fattore di convergenza del metodo.
 - (d) Ricavare la relazione errore-scarto del metodo di punto fisso nel caso generale ($g'(\xi) \neq 0$).
 - (e) Per quali valori del punto iniziale il metodo $x_{k+1} = \tan x_k$ converge alla soluzione ($\xi = 0$)?

Nota Bene.

1. Cifre decimali:

- 1. esercizio: 7 cifre decimali per le iterazioni
- 2. esercizio: punto (a) 3 cifre; iterazioni di Gauss-Seidel 4 cifre
- 3. esercizio: 5 cifre.

2. Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.

3. *Tempo a disposizione 2 ore 30'*. Voti: 8, 8, 8, 8.

1. Data l'equazione

$$x^6 - e^x = 0$$

- (a) Si dimostri esistenza e unicità della soluzione in $[1, 1.5]$.
- (b) A partire dal punto iniziale $x_0 = 1.4$ si esegua un numero sufficiente di iterazioni con il metodo di Newton-Raphson per approssimare la soluzione con **un errore**⁴ inferiore in modulo a 10^{-7} . **Si consideri come soluzione vera ξ l'ultimo valore trovato.**
- (c) Senza eseguire iterazioni, si dica per quali valori del punto iniziale il metodo di punto fisso $x_{k+1} = e^{x_k/6}$ converge alla soluzione; si calcoli quindi la costante asintotica M del metodo. Provare teoricamente che $M = \frac{\xi}{6}$.
- (d) Si calcoli un'iterazione del metodo di Aitken applicato al metodo definito al punto c), a partire da $x_0 = 1.21$. Usando gli errori si stimi la costante asintotica.
2. Il metodo SOR applicato ad un certo sistema $Ax = b$ dove A è tridiagonale, produce, utilizzando ω ottimo, i seguenti errori (in norma euclidea) alle iterazioni 22 e 20, rispettivamente:

$$\varepsilon_{22} = 2.771 \times 10^{-11}, \quad \varepsilon_{20} = 3.506 \times 10^{-10}.$$

- (a) Con i soli dati forniti, stimare la costante asintotica del metodo SOR e, quindi, stimare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

Facoltativo: ricavare una relazione che lega il raggio spettrale di Gauss-Seidel al raggio spettrale di SOR con ω ottimo, per una generica matrice biciclica e coerentemente ordinata.

- (b) Sapendo ora che

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \text{soluzione vera } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = [1.09877 \quad 2.93416 \quad 1.03292]^T$ si esegua 1 iterazione con il metodo di Gauss-Seidel. Usando la norma infinito degli errori, si stimi sperimentalmente la costante asintotica e la si confronti con il risultato del punto a).

- (c) Sapendo che due autovalori di A sono $\lambda_3 = 8.5169094$ e $\lambda_2 = 3.7270088$, calcolare $\det A$ (usare anche la traccia di A).

segue $\longrightarrow$

⁴stimato in funzione dello scarto e della costante asintotica

3. Della funzione $f(x) = \cos x + x^4 - \sin x$, nota nei nodi $x_i = ih, h = 0.2, i = 0, 1, 2, 3, 4$, si vuole calcolare

$$I = \int_0^{0.8} f(x) dx, \quad \text{valore vero} \quad I = 0.47960.$$

Usando tutti e soli i dati si approssimi l'integrale

- (a) con la formula dei trapezi composta (I_T). Valutare l'errore commesso (in valore assoluto).
 - (b) con la formula di Cavalieri-Simpson composta (I_S). Valutare l'errore commesso (in valore assoluto) e confrontarlo con la maggiorazione dell'errore della formula di Cavalieri-Simpson.
 - (c) Usando I_T e I_S calcolare l'approssimazione dell'integrale con la formula dei trapezi composta e la metà del numero di intervalli usati in (a). (*Suggerimento*: si ricordi l'estrapolazione di Richardson applicata ai trapezi). Valutare l'errore commesso, in valore assoluto.
 - (d) Sempre a partire dai dati, fornire la migliore approssimazione di $f'(0.5)$ e valutare l'errore commesso. È in accordo con la teoria? Giustificare.
4. Metodo di punto fisso per la soluzione dell'equazione $x = g(x)$.
- (a) Dare un'interpretazione geometrica del metodo nei casi di (i) convergenza monotona (ii) convergenza oscillante.
 - (b) Enunciare e dimostrare la condizione di convergenza del metodo in un intervallo.
 - (c) Siano $g'(\xi) = 0$ e $g''(\xi) \neq 0$, ricavare ordine e fattore di convergenza del metodo.
 - (d) Ricavare la relazione errore-scarto del metodo di punto fisso nel caso generale ($g'(\xi) \neq 0$).
 - (e) Per quali valori del punto iniziale il metodo $x_{k+1} = \tan x_k$ converge alla soluzione ($\xi = 0$)?

Nota Bene.

1. Cifre decimali:

- 1. esercizio: 7 cifre decimali per le iterazioni
- 2. esercizio: punto (a) 3 cifre; iterazioni di Gauss-Seidel 4 cifre
- 3. esercizio: 5 cifre.

2. Consegnare solo il foglio di bella. Ricopiare tutti i passaggi significativi.

3. *Tempo a disposizione 2 ore 30'*. Voti: 8, 8, 8, 8.