TEMA N. 1

1. Sia data l'equazione

$$x^3 - 5x + 1 = 0.$$

- (a) Mostrare che esiste un'unica soluzione ξ dell'equazione in $[0, 1.29]$.
 (b) Si consideri, per la soluzione dell'equazione data, il metodo di punto fisso

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 1}{5}.$$

- (i) Si dimostri la convergenza a ξ di tale metodo, per ogni scelta di $x_0 \in [0, 1.29]$.
 (ii) Si eseguano 4 iterazioni del metodo di punto fisso a partire da $x_0 = 1.29$.
 (iii) Si stimino costante asintotica ed errore alla quarta iterazione.
 (iv) Considerando ora che $\xi = 0.201639675723405$ verificare la buona concordanza tra errore vero e stima.
 (c) Per risolvere l'equazione data si usi ora il metodo di Newton-Raphson ($x_0 = 1.29$). Calcolare un'iterazione e commentare il risultato ottenuto.

2. Si vuole risolvere il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \text{soluzione vera} \quad x_v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la costante asintotica del metodo di Gauss-Seidel e se ne deduca la convergenza.
 (b) Si calcoli una iterazione $x^{(1)}$ utilizzando il metodo di Gauss-Seidel a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = [-0.6, 1.424, 1.2304]^T$. Usando gli errori, stimare sperimentalmente la costante asintotica del metodo di Seidel e confrontare il valore ottenuto con il risultato del punto (a).
 (c) Sapendo che l'autovalore minimo di A è $\lambda_1 = 0.2856$, mostrare che A è definita positiva. Risolvere quindi il sistema dato con la fattorizzazione di Cholesky.
 3. Sia nota la funzione $f(x) = e^x - x^3 - \log(x + 1)$ nei quattro nodi $x_i = -0.8 + ih, h = 0.2, i = 0, 1, 2, 3$.

- (a) Si scriva la tabella delle differenze divise e il relativo polinomio di interpolazione di Newton.
 (b) Si valuti il polinomio in $\bar{x} = -0.5$ e quindi l'errore di interpolazione in tale punto.
 (c) Si dia una maggiorazione dell'errore commesso (in modulo) e la si confronti con l'errore "vero".
 (d) Mediante un'opportuna formula di derivazione numerica, si stimi $f'(\bar{x})$
 • con i valori della funzione in x_0, x_3 . Chiamare la stima df_1 e calcolare l'errore $E_1 = |df_1 - f'(\bar{x})|$.
 • con i valori della funzione in x_1, x_2 . Chiamare la stima df_2 e calcolare l'errore $E_2 = |df_2 - f'(\bar{x})|$.
 Calcolare E_1/E_2 . Quale valore di tale rapporto ci si aspetterebbe dalla teoria? Giustificare.
 (e) **Facoltativo.** Mediante l'estrapolazione di Richardson, trovare una terza approssimazione (df_3).

4. Quadratura numerica.

- (a) Ricavare le formule di Newton-Cotes nel caso generale.
 (b) Ricavare i coefficienti di Newton-Cotes per $n = 2$ (Cavalieri-Simpson).
 (c) Ricavare la formula dell'errore della regola dei trapezi.

(d) Dato il seguente integrale
$$\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}} (3x^4 + \sqrt{2}x^3 - x^2 + x + \pi) dx$$

calcolare l'errore che si commette con la formula di Cavalieri-Simpson (semplice).

- (e) Definire grado di precisione di una formula e dire qual'è il grado di precisione di Cavalieri- Simpson.

Tempo a disposizione: 2 ore, 30 minuti. (Voti: 8/30 per ciascun esercizio)

Cifre decimali: **Esercizio 1:** $\boxed{6}$ per le iterazioni; **Esercizio 2:** $\boxed{4}$ per Gauss-Seidel, per Cholesky aritmetica esatta; **Esercizio 3:** $\boxed{4}$. Giustificare i passaggi non ovvi. Consegnare solo i fogli di bella + la traccia.

TEMA N. 2

1. Sia data l'equazione

$$x^3 - 4x + 1 = 0.$$

- (a) Mostrare che esiste un'unica soluzione ξ dell'equazione in $[0, 1.15]$.
 (b) Si consideri, per la soluzione dell'equazione data, il metodo di punto fisso

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 1}{4}.$$

- (i) Si dimostri la convergenza a ξ di tale metodo, per ogni scelta di $x_0 \in [0, 1.15]$.
 (ii) Si eseguano 4 iterazioni del metodo di punto fisso a partire da $x_0 = 1.15$.
 (iii) Si stimino costante asintotica ed errore alla quarta iterazione.
 (iv) Considerando ora che $\xi = 0.254101688365052$ verificare la buona concordanza tra errore vero e stima.
 (c) Per risolvere l'equazione data si usi ora il metodo di Newton-Raphson ($x_0 = 1.15$). Calcolare un'iterazione e commentare il risultato ottenuto.

2. Si vuole risolvere il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \text{soluzione vera} \quad x_v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la costante asintotica del metodo di Gauss-Seidel e se ne deduca la convergenza.
 (b) Si calcoli una iterazione $x^{(1)}$ utilizzando il metodo di Gauss-Seidel a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = [1.4, 0.576, 0.7696]^T$. Usando gli errori, stimare sperimentalmente la costante asintotica del metodo di Seidel e confrontare il valore ottenuto con il risultato del punto (a).
 (c) Sapendo che l'autovalore minimo di A è $\lambda_1 = 0.0915$, mostrare che A è definita positiva. Risolvere quindi il sistema dato con la fattorizzazione di Cholesky.

3. Sia nota la funzione $f(x) = e^x + x^2 - \log(x - 1)$ nei quattro nodi $x_i = 1.2 + ih, h = 0.2, i = 0, 1, 2, 3$.

- (a) Si scriva la tabella delle differenze divise e il relativo polinomio di interpolazione di Newton.
 (b) Si valuti il polinomio in $\bar{x} = 1.5$ e quindi l'errore di interpolazione in tale punto.
 (c) Si dia una maggiorazione dell'errore commesso (in modulo) e la si confronti con l'errore "vero".
 (d) Mediante un'opportuna formula di derivazione numerica, si stimi $f'(\bar{x})$
 • con i valori della funzione in x_0, x_3 . Chiamare la stima df_1 e calcolare l'errore $E_1 = |df_1 - f'(\bar{x})|$.
 • con i valori della funzione in x_1, x_2 . Chiamare la stima df_2 e calcolare l'errore $E_2 = |df_2 - f'(\bar{x})|$.
 Calcolare E_1/E_2 . Quale valore di tale rapporto ci si aspetterebbe dalla teoria? Giustificare.
 (e) **Facoltativo.** Mediante l'estrapolazione di Richardson, trovare una terza approssimazione (df_3).

4. Quadratura numerica.

- (a) Ricavare le formule di Newton-Cotes nel caso generale.
 (b) Ricavare i coefficienti di Newton-Cotes per $n = 2$ (Cavalieri-Simpson).
 (c) Definire grado di precisione di una formula e dire qual'è il grado di precisione di Cavalieri-Simpson.
 (d) Ricavare la formula dell'errore della regola dei trapezi.

(e) Dato il seguente integrale
$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+1} (12x^4 + \pi x^3 + x^2 - 3x + \sqrt{3}) dx$$

calcolare l'errore che si commette con la formula di Cavalieri-Simpson (semplice).

Tempo a disposizione: 2 ore, 30 minuti. (Voti: 8/30 per ciascun esercizio)

Cifre decimali: **Esercizio 1:** $\boxed{6}$ per le iterazioni; **Esercizio 2:** $\boxed{4}$ per Gauss-Seidel, per Cholesky aritmetica esatta; **Esercizio 3:** $\boxed{4}$. Giustificare i passaggi non ovvi. Consegnare solo i fogli di bella + la traccia.