

1. Data l'equazione

$$x^3 - e^x = 0$$

(a) Si dimostri esistenza e unicità della soluzione in $[1.5, 2]$.

Soluzione. L'esistenza si prova con il teorema degli zeri che è verificato in quanto f è continua e $f(1.5) = -1.1067 < 0$ e $f(2) = 0.6109 > 0$. Unicità: occorre provare che f è monotona e quindi $f' = 3x^2 - e^x$ è crescente. Per fare questo si può osservare che $f'(1.5) = 2.26 > 0$ e che $f''(x) = 6x - e^x$ è chiaramente positiva visto che $6xe^x \geq 9e^2 > 0$. Quindi f' cresce ed è pertanto positiva. Anche un grafico sarebbe stato sufficiente a mostrare la positività di f' .

(b) A partire dal punto iniziale $x_0 = 1.5$ si esegua un numero sufficiente di iterazioni con il metodo di Newton-Raphson per approssimare la soluzione con un errore inferiore in modulo a 10^{-8} .

Soluzione. Sono sufficienti 4 iterazioni: $x_4 = 1.857183861461$, $s_4 = -4.56592e - 05$, $|\varepsilon_4| = 1.252e - 09 < 10^{-8}$.

(c) Senza eseguire iterazioni, si dica per quali valori del punto iniziale il metodo di punto fisso $x_{k+1} = e^{x_k/3}$ converge alla soluzione; si calcoli quindi la costante asintotica del metodo.

Soluzione. Occorre usare il teorema: ... se $|g'(x)| \leq m < 1, \forall x \in [a, b]$ allora il punto fisso converge per ogni $x_0 \in [a, b]$. Pertanto

$$\frac{e^{x/3}}{3} < 1 \quad \implies \quad x < 3 \log 3.$$

La costante asintotica $M = |g'(\xi)| \approx |g'(1.8571838614)| = 0.6191$.

(d) Si calcoli un'iterazione del metodo di Aitken applicato al metodo definito al punto c), a partire da $x_0 = 1.85$. Usando gli errori si stimi la costante asintotica.

Soluzione.

$$x_1 = 1.8571753, \quad M = \frac{8.6 \times 10^{-6}}{(7.2 \times 10^{-3})^2} \approx 0.1668.$$

2. Dato il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

(a) Si dica perché il metodo di Jacobi converge

Soluzione. Il metodo di Jacobi converge perché A è diagonalmente dominante in senso stretto.

(b) Senza eseguire iterazioni si calcoli la costante asintotica del metodo di Gauss-Seidel, giustificando brevemente il procedimento impiegato.

Soluzione. La matrice A è tridiagonale quindi vale $\rho(E_S) = \rho(E_J)^2$. Calcoliamo gli autovalori di E_J .

$$E_J = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ -1/6 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui $\sigma(E_J) = \{0, \pm\sqrt{\frac{2}{9}}\}$ e quindi $M_{GS} = \frac{2}{9}$.

(c) A partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = [1.9630 \quad 1.9012 \quad 3.0329]^T$ si eseguano due iterazioni con il metodo di Gauss-Seidel. Usando la norma infinito degli scarti, si stimi sperimentalmente la costante asintotica e la si confronti con il risultato del punto b).

Soluzione. La seconda iterazione di Seidel

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.4961 \\ 1.7235 \\ 3.0922 \end{bmatrix}.$$

La stima della costante asintotica

$$M_{scarti} \approx \frac{\|s^{(2)}\|_{\infty}}{\|s^{(1)}\|_{\infty}} = 0.2222,$$

in perfetto accordo con il valore teorico.

- (d) Si dica perché è possibile determinare l' ω ottimo e quindi lo si calcoli. Si calcoli infine la velocità di convergenza del metodo SOR con ω ottimo.

Soluzione. La matrice è tridiagonale inoltre Jacobi converge e $\sigma(E_J) \subset \mathbb{R}$. Quindi

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - M_{GS}}} = 1.0627, \quad R_{SOR} = -\log_{10}(\omega_{opt} - 1) = 1.2024.$$

3. Sia nota la funzione $f(x) = \sin x + x^4 - \cos x$ nei quattro nodi $x_i = 0.1 + ih, h = 0.1, i = 0, 1, 2, 3$.

- (a) Si scriva la tabella delle differenze divise e il relativo polinomio di interpolazione di Newton.
 (b) Si valuti il polinomio in $\bar{x} = 0.25$ e quindi l'errore di interpolazione in tale punto.
 (c) Si dia una maggiorazione dell'errore commesso (in modulo) e la si confronti con l'errore "vero".

Soluzione: a) $\rightarrow$ c). La tabella delle differenze divise

0.1	-0.89507			
0.2	-0.77980			
0.3	-0.65172	...	...	0.79753
0.4	-0.50604			

$$P(0.25) = -0.71766, \quad f(0.25) = -0.71760, \quad |E| = 5.45 \times 10^{-5}.$$

Maggiorazione: $f^{(4)}(x) = \sin x + 24 - \cos x$, funzione positiva e crescente (la sua derivata è positiva), dunque

$$\max f^{(4)}(x)_{x \in [0.1, 0.4]} = 24 + \sin 0.4 - \cos 0.4 = 23.47.$$

Pertanto

$$|E| \leq \frac{|F(0.25)| \cdot 23.47}{24} = 5.5 \times 10^{-5}.$$

- (d) Si stimi ora $f'(\bar{x})$ utilizzando una un'opportuna formula di derivazione numerica con:
 i. valori di $f(x_0)$ e $f(x_3)$ (chiamare df_1 tale stima ed $E_1 = |df_1 - f'(\bar{x})|$ l'errore).
 ii. valori di $f(x_1)$ e $f(x_2)$ (chiamare df_2 tale stima ed $E_2 = |df_2 - f'(\bar{x})|$ l'errore).

Si dica se la riduzione dell'errore E_1/E_2 è conforme alla teoria.

Soluzione.

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{f(0.3) - f(0)}{0.3} = 1.29676, & E_1 &= 1.79 \times 10^{-2} \\ df_2 &= \frac{f(0.2) - f(0.1)}{0.1} = 1.28081, & E_2 &= 1.99 \times 10^{-3} \\ \frac{E_1}{E_2} &= 9.0023, \end{aligned}$$

in completo accordo con la teoria che prevede un errore proporzionale ad h^2 per cui passando da ad $h = 0.3$ ad $h = 0.1$ l'errore si riduce di un fattore $3^2 = 9$.