Prova scritta di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale – CANALE A

25 GIUGNO 2021

L. BERGAMASCHI – A. FRANCESCHINI

1. Data l'equazione
$$x^3 - e^x = 0$$
   (a) **Si dimostri esistenza e unicità della soluzione in** $[1.5, 2]$.

   (b) A partire dal punto iniziale $x_0 = 1.5$ si esegua un numero sufficiente di iterazioni con il metodo di Newton-Raphson per approssimare la soluzione con **un errore**[1] inferiore in modulo a 10^{-8}.

   (c) **Senza eseguire iterazioni, si dica per quali valori del punto iniziale il metodo di punto fisso** $x_{k+1} = e^{x_k/3}$ **converge alla soluzione; si calcoli quindi la costante asintotica del metodo.**

   (d) Si calcoli un'iterazione del metodo di Aitken applicato al metodo definito al punto c), a partire da $x_0 = 1.85$. Usando gli errori – assumendo come soluzione vera quella trovata al punto b) – si stimi la costante asintotica.

2. Dato il sistema lineare $Ax = b$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$
   (a) **Si dica perché il metodo di Jacobi converge**

   (b) Senza eseguire iterazioni si calcoli la costante asintotica del metodo di Gauss-Seidel, **giustificando brevemente il procedimento impiegato**.

   (c) A partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.9630 & 1.9012 & 3.0329 \end{bmatrix}^T$ si eseguano due iterazioni con il metodo di Gauss-Seidel. **Usando la norma infinito degli scarti, si stimi sperimentalmente la costante asintotica e la si confronti con il risultato del punto b).**

   (d) **Si dica perché è possibile determinare l'**ω **ottimo** e quindi lo si calcoli. Si calcoli infine la velocità di convergenza del metodo SOR con ω ottimo.

3. Sia nota la funzione $f(x) = \sin x + x^4 - \cos x$ nei quattro nodi $x_i = 0.1 + ih, h = 0.1, i = 0, 1, 2, 3$.

   (a) Si scriva la tabella delle differenze divise e il relativo polinomio di interpolazione di Newton.

   (b) Si valuti il polinomio in $\bar{x} = 0.25$ e quindi l'errore di interpolazione in tale punto.

   (c) Si dia una maggiorazione dell'errore commesso (in modulo) e la si confronti con l'errore "vero".

   (d) Si stimi ora $f'(\bar{x})$ utilizzando una un'opportuna formula di derivazione numerica:

      i. utilizzando i valori di $f(x_0)$ e $f(x_3)$ (chiamare df_1 tale stima ed $E_1 = |df_1 - f'(\bar{x})|$ l'errore).

      ii. utilizzando i valori di $f(x_1)$ e $f(x_2)$ (chiamare df_2 tale stima ed $E_2 = |df_2 - f'(\bar{x})|$ l'errore).

      Si dica se la riduzione dell'errore E_1/E_2 **è conforme alla teoria.**

4. **Metodo di punto fisso per la soluzione dell'equazione** $x = g(x)$.

   (a) **Dare un'interpretazione geometrica del metodo nei casi di (i) convergenza monotona (ii) convergenza oscillante.**

   (b) **Enunciare e dimostrare la condizione di convergenza del metodo in un intervallo.**

   (c) **Siano** $g'(\xi) = 0$ **e** $g''(\xi) \neq 0$**, ricavare ordine e fattore di convergenza del metodo.**

   (d) **Ricavare la relazione errore-scarto del metodo di punto fisso nel caso generale** $(g'(\xi) \neq 0)$.

   (e) **Sia da approssimare la soluzione** $\xi = 0$ **dell'equazione** $x = x^5$. **Qual è l'ordine di convergenza del metodo di punto fisso in questo caso? Giustificare.**

---

[1] **stimato in funzione dello scarto e della costante asintotica**

RISULTATI DA RIPORTARE

Esercizio 1	
b)	numero di iterazioni impiegate $k =$.
	Soluzione finale $x_k =$
	scarto finale $s_k =$ errore finale $\varepsilon_k =$
c)	Costante asintotica metodo punto fisso $M =$
d)	Iterazione di Aitken $x_1 =$
	Costante asintotica $M_{aitk} =$
Esercizio 2	
b)	Costante asintotica teorica di Gauss Seidel $M =$
c)	seconda iterazione di Gauss-Seidel $x^{(2)} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$
	Costante asintotica sperimentale $M_{scarti} =$
d)	$\omega_{opt} =$
	$R_{SOR} =$
Esercizio 3	
a)	Scrivere la tabella alle differenze divise
b)	$P(0.25) =$ errore $E(0.25) =$
c)	Maggiorazione dell'errore $\|E\| \leq$
d)	$E_1 =$ $E_2 =$ $E_1/E_2 =$

NOTA

1. È vietato consultare testi o appunti.
2. **Cifre decimali**:
   - 1. esercizio: 7 cifre decimali per le iterazioni
   - 2. esercizio: iterazioni di Gauss-Seidel 4 cifre
   - 3. esercizio: 5 cifre.
3. *Tempo a disposizione 2 ore*
4. Voti: 8, 8, 8, 8.
5. Alla fine della prova è necessario scansionare due facciate A4 contenenti
   (a) La risposta ai quesiti in rosso.
   (b) La risposta alla domanda di teoria (Esercizio 4).
   (c) I risultati, da riportare seguendo fedelmente la traccia della tabella precedente

   salvando la scansione in un unico file da consegnare nell'apposita attività Moodle.