

14 LUGLIO 2021

L. BERGAMASCHI – A. FRANCESCHINI

1. Data l'equazione

$$x = g(x), \quad \text{dove} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2.6x + 2}$$

- (a) **Se ne calcoli la soluzione vera.**
- (b) **Si calcoli la costante asintotica del metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$ e si dica perché il metodo converge localmente alla soluzione. Si determini il più grande intervallo di convergenza del metodo di punto fisso.**
- (c) A partire dal punto iniziale $x_0 = 1$ si eseguano 3 iterazioni con il metodo di punto fisso. Usando gli errori stimare sperimentalmente la costante asintotica.
- (d) A partire da $x_0 = 0.9$ si eseguano due iterazioni con il metodo di Newton-Raphson applicato **ad un'opportuna equazione**. Stimare la costante asintotica M_{NR} del metodo. Mediante M_{NR} e gli scarti, stimare l'errore alla seconda iterazione e confrontarlo con l'errore vero.

2. Al variare di un parametro reale α si definisce il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 3 - \alpha & 2 & \alpha^2 - 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ \alpha^3 + 1 & -3 & 6 + \alpha \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (a) **Si dica per quale valore del parametro α la matrice A è biciclica e coerentemente ordinata.** Per il resto dell'esercizio si usi il valore di α appena trovato.
- (b) Si dimostri che A è definita positiva e se ne calcoli la fattorizzazione di Cholesky. Usando la fattorizzazione si risolva il sistema lineare e si calcoli $\det A^{-1}$.
- (c) **Si dica perché il metodo di Gauss-Seidel converge alla soluzione di $Ax = b$** e, a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = [1.5 \quad 1.75 \quad 0.85]^T$, si esegua una iterazione con tale metodo. Usando la norma infinito degli errori, si stimi sperimentalmente la costante asintotica.
- (d) **Sapendo che lo spettro della matrice di iterazione di Gauss-Seidel è $\{0, 0, 0.28\}$, si dica perché è possibile determinare l' ω ottimo** e quindi lo si calcoli. Si calcoli infine la velocità di convergenza del metodo SOR con ω ottimo.

3. Si vuole calcolare l'integrale

$$I = \int_1^4 \left(\frac{x^4}{12} + e^{-x} - 1 \right) dx, \quad I_v = 14.39956.$$

- (a) **Determinare il numero minimo di sottointervalli n in cui dividere l'intervallo $[1, 4]$ in modo da approssimare I con la formula di Cavalieri-Simpson composta con un errore (in modulo) inferiore a 5×10^{-3} .**
- (b) Usando il valore di n trovato al punto precedente si approssimi I con la formula di Cavalieri-Simpson composta. Chiamare tale approssimazione I_n .
- (c) Si calcoli l'errore in valore assoluto $|I_v - I_n|$ **e si commenti il risultato ottenuto.**
- (d) Si determini ora I_1 , il valore approssimato di I con la formula di Cavalieri-Simpson **semplice**. **A partire da I_1 e dal valore I_n trovato prima, si fornisca una nuova e più accurata approssimazione dell'integrale (I_R) usando l'estrapolazione di Richardson.** Calcolare l'errore $E_R = |I_v - I_R|$.

4. Sia nota una funzione $f(x)$ in $n + 1$ punti sperimentali.

- (a) **Ricavare il polinomio di interpolazione di Lagrange che onora la funzione negli $n + 1$ dati sperimentali. Verificare la proprietà di interpolazione.**
- (b) **Enunciare e dimostrare la formula del resto del polinomio di interpolazione di Lagrange.**
- (c) **Dati $x_i = i, i = 0, \dots, 4$, disegnare un grafico qualitativo di $L_2^{(4)}(x)$.**
- (d) **Si vuole interpolare la funzione $f(x) = x^4 - x^2 + 6x + 2$ nei nodi definiti in (c) con il polinomio di Lagrange di grado 4. Si valuti l'errore di interpolazione nel punto $\bar{x} = 0.88$.**

RISULTATI DA RIPORTARE

Esercizio 1 a) b) c) d)	Soluzione vera $\xi =$ Costante asintotica metodo punto fisso $M =$ Terza iterazione punto fisso $x_3 =$ $M_{scarti} =$ $x_2 =$ Newton-Raphson: stima errore $ \varepsilon_2 \approx$ errore vero $ \varepsilon_2 =$
Esercizio 2 a) b) c) d)	$\alpha =$ $L = \begin{bmatrix} \square & & \\ \square & \square & \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$ Soluzione $x = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$, $\det A^{-1} =$ iterazione di Gauss-Seidel $x^{(1)} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$ Costante asintotica sperimentale $M_{scarti} =$ $\omega_{opt} =$ $R_{SOR} =$
Esercizio 3 a) b) c) d)	Numero di sottointervalli $n =$ $I_n =$ $ I_v - I_n =$ $I_R =$ $ I_v - I_R =$

NOTA

1. È vietato consultare testi o appunti.

2. **Cifre decimali:**

- 1. esercizio: 7 cifre decimali per le iterazioni
- 2. esercizio: iterazioni di Gauss-Seidel 4 cifre
- 3. esercizio: 5 cifre.

3. *Tempo a disposizione 2 ore*

4. Voti: 8, 8, 8, 8.

5. Alla fine della prova è necessario scansionare in un unico file pdf, e consegnare nell'apposita attività Moodle, due facciate A4 contenenti

(a) La risposta ai quesiti in rosso.

(b) La risposta alla domanda di teoria (Esercizio 4).

(c) I risultati richiesti, secondo lo schema precedente

Le risposte dettagliate (a) e i risultati (c) possono eventualmente essere riportati seguendo l'ordine della traccia.