Preappello di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale (Canale A)

PROF. L. BERGAMASCHI 5 GIUGNO 2019 **TEMA N. 1**

1. Si vuole calcolare numericamente la radice quadrata di un numero positivo a mediante la soluzione dell'equazione $x^2 - a = 0$.
   (a) Si consideri il metodo di punto fisso $x_{k+1} = x_k - (x_k^2 - a)$. Per quali valori di a tale metodo converge alla soluzione $\xi = \sqrt{a}$? Per quali valori di a la convergenza sarà oscillante?
   (b) Si ponga ora $a = 3$ e si risolva l'equazione data con il metodo di Newton di punto iniziale $x_0 = 3$ e tre iterazioni. Si calcoli la costante asintotica analiticamente (M_1) e sperimentalmente con gli scarti (M_2) e si confrontino i due valori ottenuti. Mediante gli scarti stimare quindi l'errore all'ultima iterazione e confrontarlo con l'errore vero ($|\xi - x_3|$).
   (c) L'estrapolazione di Aitken applicata al metodo di punto fisso descritto nel punto 1.(a) produce le seguenti iterazioni: $x_0 = 1.7, x_1 = 1.731339$. Calcolare x_2 con Aitken. Stimare quindi la costante asintotica del metodo.

2. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
   (a) Se ne calcoli la fattorizzazione di Cholesky.
   (b) Usando la fattorizzazione trovata si risolva il sistema $Ax = b$ dove $b = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$.
   (c) Si dica se il metodo di Gauss-Seidel converge se applicato alla soluzione del precedente sistema $Ax = b$. In caso affermativo si calcoli un'iterazione con tale metodo a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = \begin{bmatrix} -2.9 & 2.1 & 0.8 \end{bmatrix}^T$. Si calcoli infine la norma euclidea **del residuo** a tale iterazione.
   (d) Considerando che gli autovalori della matrice di iterazione di Gauss-Seidel sono $\{0, 0, 0.75\}$, si dica perché è possibile determinare il valore ottimale del parametro di rilassamento ω. Calcolare ω_{opt} e la velocità di convergenza di SOR con tale valore di ω.

3. Si vuole calcolare

$$I = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx, \qquad \text{dove} \quad f(x) = \sin x + x^3 + e^{x/2} \qquad \text{valore vero } I = 8.92995$$

   (a) Si dica in quanti sottointervalli n si deve suddividere l'intervallo di integrazione in modo da approssimare I con la formula di Cavalieri-Simpson composta con un errore inferiore (in modulo) a $2 \cdot 10^{-3}$.
   (b) Utilizzando il valore di n determinato al punto precedente, si approssimi l'integrale con la formula di Cavalieri-Simpson composta. Si calcoli l'errore vero e si commenti il risultato ottenuto.
   (c) Fornire due stime di $f'(0.5)$ con un'opportuna formula di derivazione numerica: (i) der_1, utilizzando i valori di f in -0.5 e 1.5 e (ii) der_2, utilizzando i valori di f in 0 e 1. Ricordando l'espressione dell'errore per tale formula si produca una terza e più accurata approssimazione (der_3) con l'estrapolazione di Richardson. Calcolare il valore assoluto dell'errore nei tre casi.

4. (a) Dati $n + 1$ punti sperimentali, ricavare il polinomio di interpolazione di Lagrange.
   (b) Dimostrare che tale polinomio onora i dati sperimentali.
   (c) Enunciare e dimostrare la formula del resto (errore) della formula di Lagrange.
   (d) Tracciare un grafico qualitativo del k-esimo polinomio elementare
   (e) Sia la funzione $f(x) = x^4 + 7x^2 - 24$ nota in 5 punti equidistanti nell'intervallo $[-1, 3]$. Quale errore di interpolazione si commette nel punto $\bar{x} = 2.5$?

---

*Tempo a disposizione: 2 ore, 30 minuti. (Voti: 8 * ones(4,1)).*
Cifre decimali: **Esercizio 1:** *6 per le iterazioni;* **Esercizio 2:** *4 per Gauss-Seidel;* **Esercizio 3:** *4.*
Giustificare i passaggi non ovvi. Consegnare **solo** il foglio di bella e questo foglio con la traccia.

Preappello di CALCOLO NUMERICO per Ingegneria Aerospaziale (Canale A)

PROF. L. BERGAMASCHI 5 GIUGNO 2019 **TEMA N. 2**

1. Si vuole calcolare numericamente la radice quadrata di un numero positivo α mediante la soluzione dell'equazione $x^2 - \alpha = 0$.
   (a) Si consideri il metodo di punto fisso $x_{k+1} = x_k - (x_k^2 - \alpha)$. Per quali valori di α tale metodo converge alla soluzione $\xi = \sqrt{\alpha}$? Per quali valori di α la convergenza sarà monotona?
   (b) Si ponga ora $\alpha = 7$ e si risolva l'equazione data con il metodo di Newton di punto iniziale $x_0 = 4$ e tre iterazioni. Si calcoli la costante asintotica analiticamente (M_1) e sperimentalmente con gli scarti (M_2) e si confrontino i due valori ottenuti. Mediante gli scarti stimare quindi l'errore all'ultima iterazione e confrontarlo con l'errore vero ($|\xi - x_3|$).
   (c) L'estrapolazione di Aitken applicata al metodo di punto fisso descritto nel punto 1.(a) produce le seguenti iterazioni: $x_0 = 2.8, x_1 = 2.623529$. Calcolare x_2 con Aitken. Stimare quindi la costante asintotica del metodo.

2. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
   (a) Se ne calcoli la fattorizzazione di Cholesky.
   (b) Usando la fattorizzazione trovata si risolva il sistema $Ax = b$ dove $b = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \end{bmatrix}^T$.
   (c) Si dica se il metodo di Gauss-Seidel converge se applicato alla soluzione del precedente sistema $Ax = b$. In caso affermativo si calcoli un'iterazione con tale metodo a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.1 & -2.1 & 2.8 \end{bmatrix}^T$. Si calcoli infine la norma euclidea **del residuo** a tale iterazione.
   (d) Considerando che gli autovalori della matrice di iterazione di Gauss-Seidel sono $\{0, 0, 0.9\}$, si dica perché è possibile determinare il valore ottimale del parametro di rilassamento ω. Calcolare ω_{opt} e la velocità di convergenza di SOR con tale valore di ω.

3. Si vuole calcolare
$$I = \int_1^4 f(x)\,dx, \qquad \text{dove} \quad f(x) = \cos x + x^2 + e^{x/2} \qquad \text{valore vero } I = 30.88240$$
   (a) Si dica in quanti sottointervalli n si deve suddividere l'intervallo di integrazione in modo da approssimare I con la formula di Cavalieri-Simpson composta con un errore inferiore (in modulo) a $2 \cdot 10^{-3}$.
   (b) Utilizzando il valore di n determinato al punto precedente, si approssimi l'integrale con la formula di Cavalieri-Simpson composta. Si calcoli l'errore vero e si commenti il risultato ottenuto.
   (c) Fornire due stime di $f'(2.5)$ con un'opportuna formula di derivazione numerica: (i) der_1, utilizzando i valori di f in 1.5 e 3.5 e (ii) der_2, utilizzando i valori di f in 2 e 3. Ricordando l'espressione dell'errore per tale formula si produca una terza e più accurata approssimazione (der_3) con l'estrapolazione di Richardson. Calcolare il valore assoluto dell'errore nei tre casi.

4. (a) Dati $n + 1$ punti sperimentali, ricavare il polinomio di interpolazione di Lagrange.
   (b) Dimostrare che tale polinomio onora i dati sperimentali.
   (c) Enunciare e dimostrare la formula del resto (errore) della formula di Lagrange.
   (d) Tracciare un grafico qualititativo del k-esimo polinomio elementare
   (e) Sia la funzione $f(x) = 4x^3 + 13x^2 - 24x$ nota in 4 punti equidistanti nell'intervallo $[-1, 2]$. Quale errore di interpolazione si commette nel punto $\bar{x} = 0.7$?

---

*Tempo a disposizione: 2 ore, 30 minuti. (Voti: 8 * ones(4,1)).*
Cifre decimali: **Esercizio 1:** *6 per le iterazioni;* **Esercizio 2:** *4 per Gauss-Seidel;* **Esercizio 3:** *4.*
Giustificare i passaggi non ovvi. Consegnare **solo** il foglio di bella e questo foglio con la traccia.