

Angoli di Eulero

Vogliamo descrivere in forma parametrica la mutua orientazione di due terne cartesiane ortonormali levogire che possiamo pensare aventi la stessa origine. Siano $Oxyz$ e $O\xi\eta\zeta$ tali terne, di versori $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ e $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$, rispettivamente. Poiché risulta necessariamente

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{R}\mathbf{c}_i, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (1)$$

per una (sola) scelta della rotazione \mathbf{R} , avremo in tale modo anche dato una parametrizzazione dell'insieme delle rotazioni.

Escludendo il caso banale in cui le due terne coincidano, possiamo senza ledere la generalità supporre che gli assi z e ζ non siano paralleli. Allora i piani Oxy e $O\xi\eta$ si intersecano lungo una linea n detta *linea dei nodi*. Scegliamo come versore di n quello che vede antioraria la rotazione che porta \mathbf{c}_3 a sovrapporsi a \mathbf{j}_3 . L'angolo θ tra questi due versori si chiama *angolo di nutazione* e soddisfa le restrizioni $0 < \theta < \pi$.

Siano ora ψ e ϕ gli angoli di cui bisogna ruotare l'asse x in verso positivo rispetto a z per sovrapporlo alla semiretta positiva dei nodi e, rispettivamente, quest'ultima in verso positivo rispetto a ζ per sovrapporla all'asse ξ . Risulta $0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \psi < 2\pi$. Gli angoli ϕ e ψ si chiamano *angolo di rotazione propria* e *di precessione*, rispettivamente, e, assieme a θ , costituiscono gli *angoli di Eulero*.

Abbiamo fatto vedere in modo costruttivo che, date le due terne cartesiane, ad esse possiamo associare univocamente la terna di angoli di Eulero. Dimostriamo ora che, data la terna $Oxyz$ e una terna di angoli di Eulero, possiamo univocamente ricostruire la terna $O\xi\eta\zeta$. Anzitutto, ruotando l'asse x in verso positivo dell'angolo ψ determiniamo la semiretta positiva n della linea dei nodi. Questa determina il piano $Oz\zeta$, nel quale otteniamo l'asse ζ ruotando l'asse z in verso positivo dell'angolo θ . Risulta così determinato il piano $O\xi\eta$ nel quale si ottiene l'asse ξ ruotando la semiretta positiva dei nodi, in verso positivo, dell'angolo ϕ . A questo punto anche il semiasse η positivo risulta completamente determinato.

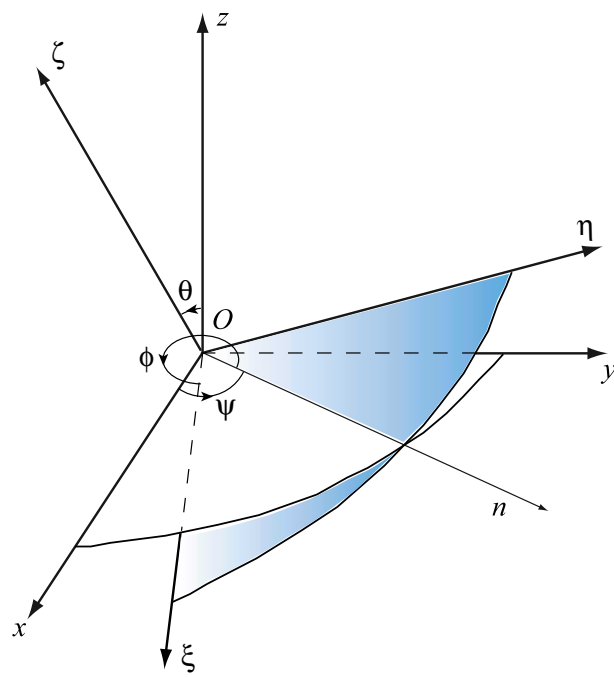


Figura 1: Angoli di Eulero