

Definizione dei numeri reali con un sistema di assiomi

November 21, 2006

Assiomi dei reali

Assiomi dei reali

Sia \mathbb{R} l'insieme di tutti i numeri reali. Allora:

- ▶ con somma e moltiplicazione usuali \mathbb{R} è un campo, essendo valide le proprietà associative, commutativa, distributiva e di esistenza degli elementi neutri e inversi rispetto a entrambe le operazioni.

Sia \mathbb{R} l'insieme di tutti i numeri reali. Allora:

- ▶ con somma e moltiplicazione usuali \mathbb{R} è un campo, essendo valide le proprietà associativa, commutativa, distributiva e di esistenza degli elementi neutri e inversi rispetto a entrambe le operazioni.
- ▶ Il campo \mathbb{R} è ordinato, cioè esiste un ordinamento totale, il \leq usuale, tale che,

Sia \mathbb{R} l'insieme di tutti i numeri reali. Allora:

- ▶ con somma e moltiplicazione usuali \mathbb{R} è un campo, essendo valide le proprietà associative, commutativa, distributiva e di esistenza degli elementi neutri e inversi rispetto a entrambe le operazioni.
- ▶ Il campo \mathbb{R} è ordinato, cioè esiste un ordinamento totale, il \leq usuale, tale che,
- ▶ per tutti i numeri reali x , y e z :

Sia \mathbb{R} l'insieme di tutti i numeri reali. Allora:

- ▶ con somma e moltiplicazione usuali \mathbb{R} è un campo, essendo valide le proprietà associative, commutativa, distributiva e di esistenza degli elementi neutri e inversi rispetto a entrambe le operazioni.
- ▶ Il campo \mathbb{R} è ordinato, cioè esiste un ordinamento totale, il \leq usuale, tale che,
- ▶ per tutti i numeri reali x , y e z :
- ▶ $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (dicotomia)

Sia \mathbb{R} l'insieme di tutti i numeri reali. Allora:

- ▶ con somma e moltiplicazione usuali \mathbb{R} è un campo, essendo valide le proprietà associative, commutativa, distributiva e di esistenza degli elementi neutri e inversi rispetto a entrambe le operazioni.
- ▶ Il campo \mathbb{R} è ordinato, cioè esiste un ordinamento totale, il \leq usuale, tale che,
- ▶ per tutti i numeri reali x , y e z :
- ▶ $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (dicotomia)
- ▶ $x \leq x$ (riflessiva)

Sia \mathbb{R} l'insieme di tutti i numeri reali. Allora:

- ▶ con somma e moltiplicazione usuali \mathbb{R} è un campo, essendo valide le proprietà associative, commutativa, distributiva e di esistenza degli elementi neutri e inversi rispetto a entrambe le operazioni.
- ▶ Il campo \mathbb{R} è ordinato, cioè esiste un ordinamento totale, il \leq usuale, tale che,
- ▶ per tutti i numeri reali x , y e z :
 - ▶ $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (dicotomia)
 - ▶ $x \leq x$ (riflessiva)
 - ▶ se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (antisimmetrica)

Sia \mathbb{R} l'insieme di tutti i numeri reali. Allora:

- ▶ con somma e moltiplicazione usuali \mathbb{R} è un campo, essendo valide le proprietà associative, commutativa, distributiva e di esistenza degli elementi neutri e inversi rispetto a entrambe le operazioni.
- ▶ Il campo \mathbb{R} è ordinato, cioè esiste un ordinamento totale, il \leq usuale, tale che,
- ▶ per tutti i numeri reali x , y e z :
 - ▶ $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (dicotomia)
 - ▶ $x \leq x$ (riflessiva)
 - ▶ se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (antisimmetrica)
 - ▶ se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (transitiva)

Assioma di Dedekind:

- ▶ L'ordinamento è completo, ossia

Assioma di Dedekind:

- ▶ L'ordinamento è completo, ossia
- ▶ ogni sottoinsieme non vuoto S di \mathbf{R} con un maggiorante in \mathbf{R} ha un estremo superiore in \mathbf{R} .

... è la completezza ...

- ▶ L'ultima proprietà è quella che differenzia i reali dai razionali.

... è la completezza ...

- ▶ L'ultima proprietà è quella che differenzia i reali dai razionali.
- ▶ Per esempio, l'insieme dei numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 ha un maggiorante razionale (per esempio 1,5)

... è la completezza ...

- ▶ L'ultima proprietà è quella che differenzia i reali dai razionali.
- ▶ Per esempio, l'insieme dei numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 ha un maggiorante razionale (per esempio 1,5)
- ▶ ma il minore dei maggioranti non è razionale

... è la completezza ...

- ▶ L'ultima proprietà è quella che differenzia i reali dai razionali.
- ▶ Per esempio, l'insieme dei numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 ha un maggiorante razionale (per esempio 1,5)
- ▶ ma il minore dei maggioranti non è razionale
- ▶ in quanto $\sqrt{2}$ non è razionale.

I numeri reali son definiti in modo univoco dalle proprietà precedenti.

- ▶ Detto in modo più preciso,

I numeri reali son definiti in modo univoco dalle proprietà precedenti.

- ▶ Detto in modo più preciso,
- ▶ dati due campi ordinati e completi \mathbb{R}_1 e \mathbb{R}_2 ,

I numeri reali son definiti in modo univoco dalle proprietà precedenti.

- ▶ Detto in modo più preciso,
- ▶ dati due campi ordinati e completi \mathbb{R}_1 e \mathbb{R}_2 ,
- ▶ questa proprietà permette di pensare ad essi come ad un unico oggetto matematico.

I numeri reali son definiti in modo univoco dalle proprietà precedenti.

- ▶ Detto in modo più preciso,
- ▶ dati due campi ordinati e completi \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 ,
- ▶ questa proprietà permette di pensare ad essi come ad un unico oggetto matematico.
- ▶ (Esiste un *isomorfismo* da \mathbf{R}_1 in \mathbf{R}_2)