

Inizio del corso: 27 ottobre 2005

ORARIO delle LEZIONI

1. Lunedì ore 16,15 ESERCIZI
2. Martedì ore 16,15 TEORIA
3. Mercoledì ore 14,15 TEORIA
4. Giovedì ore 10,15 ESERCIZI
5. Venerdì ore 14,15 TEORIA

Programma svolto

0.1 SETTIMANA I

1. TEORIA Martedì 27/09/2005

I. Introduzione al corso. Somme finite. Principio di INDUZIONE MATEMATICA e sue applicazioni. Dimostrazione del principio con la proprietà di minimo dei naturali. Insiemi, unione, intersezione, prodotto cartesiano. Funzioni, iniezioni, suriezioni. Biiezioni, composizione di funzioni, funzione inversa.

II. Permutazioni di n oggetti: $n!$. Coefficienti binomiali: definizione, loro espressioni, proprietà.

Numeri razionali. Teorema con dimostrazione: La radice quadrata di un qualunque numero primo non è razionale. Commensurabilità ed incommensurabilità di segmenti.

2. TEORIA Mercoledì 28/09/2005

I Numeri REALI come rappresentazioni decimali limitate ed illimitate, periodiche e non periodiche. Densità dei razionali nei reali. Completezza dei reali ed incompletezza dei razionali. Insiemi contigui.

Insiemi di numeri reali, maggiorante, minorante, estremi superiore ed inferiore, massimo e minimo di un insieme numerico. Esempi ed esercizi.

3. ESERCIZI Giovedì 29/09/2005

Richiami di geometria analitica: retta, parabola, circonferenza. Disequazioni di grado 1 e 2 e loro sistemi con il metodo del confronto dei grafici.

4. TEORIA Venerdì 30/09/2005

Numeri COMPLESSI, forma algebrica e cartesiana. Modulo, complesso coniugato, reciproco, quoziente in forma algebrica.

Forma trigonometrica di un numero complesso, passaggio da una forma all'altra.

0.2 SETTIMANA II

1. ESERCIZI Lunedì 03/10/2005

Richiami di geometria analitica: iperbole, iperbole equilatera anche riferita agli asintoti; ellisse. Disequazioni di grado 1 e 2 e loro sistemi con il metodo del confronto dei grafici.

2. TEORIA Martedì 04/10/2005

I. Prodotto, potenza e quoziente di numeri complessi in forma trigonometrica.

IV. Nozione di intorno in \mathbb{R}^* . Definizione di punto di accumulazione.

Esempi fisici in cui si evidenzia la necessità di introdurre una nozione di LIMITE. Nozione intuitiva di limite. Definizione generale di limite bilaterale. Qualche verifica di limite.

3. TEORIA Mercoledì 05/10/2005 (video da Treviso)

Radici n-esime di un numero complesso. notazione esponenziale (pp.308–309) Equazioni di secondo grado nel campo complesso.

Fattoriale, permutazioni; Coefficienti binomiali e formula di Newton; triangolo di Tartaglia.

Esempi fisici in cui si evidenzia la necessità di introdurre una nozione di LIMITE. Nozione intuitiva di limite. Definizione generale di limite bilaterale. Qualche verifica di limite.

4. ESERCIZI Giovedì 06/10/2005

Esercizi sui complessi. Disequazioni complesse anche con modulo e coniugato.

5. TEORIA Venerdì 07/10/2005

Punti interni ed esterni; punti di frontiera per un insieme numerico.

Intorni destri e sinistri in \mathbb{R}^* . Definizione rigorosa generale di limite laterale destro e sinistro. Limiti laterali. Teorema dei limiti unilaterali. Esempi collegati.

Teorema di unicità del limite con dimostrazione.

Teoremi della permanenza del segno e del confronto con dimostrazione.

Teorema del limite della funzione valore assoluto ($f(x) \rightarrow l$ implica $|f(x)| \rightarrow |l|$) con dimostrazione (v. Guida verde p. 46).

Adattamento della definizione generale di limite ai casi particolari con numerose verifiche di limite

0.3 SETTIMANA III

1. ESERCIZI Lunedì 10/10/2005

COMPLESSI:

Equazioni biquadratiche in \mathcal{C} .

Richiami sui polinomi, scomposizioni in fattori, teorema di Ruffini.

Teorema fondamentale dell'algebra e polinomi a coefficienti reali (pp.311–314 Testo Teoria; Testo Es.: pp57 – 60.)

LIMITI

- Verifiche di limite a piacere dal semplice al complicato.
- Calcolo di limiti con i teoremi sulle operazioni. Esercizi 6, 7, 10 pp. 91 – 92 e 6, 7, 8, 9 p. 95 Testo Esercizi. Esercizi n. 3, 4, 5 p. 90 – 91 Testo Esercizi.

2. TEORIA Martedì 11/10/2005

Limiti laterali.

Limiti fondamentali di $\sin x/x$ con dimostrazione.

Teoremi sulle operazioni dei limiti ed applicazioni per il calcolo dei limiti. Tabelle della moltiplicazione e del prodotto dei limiti. Forme indeterminate.

Infinitesimi; uso di $o(1)$. Notare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ equivale a

$$f(x) = l + o(1) \quad \text{per} \quad x \rightarrow x_0$$

3. TEORIA Mercoledì 12/10/2005 (video da Feltre)

Teorema del limite della funzione composta con applicazioni al calcolo.

CONTINUITÀ bilaterale e da un lato. Definizioni, esempi e verifiche.

Continuità di alcune funzioni elementari: $y = k$, $y = x$, $y = \sin x$ e $y = \cos x$.

SUCCESSIONI: limiti di successioni come caso particolare. Esempi di successioni induttive e con funzione generatrice. Verifiche di limite.

4. ESERCIZI Giovedì 13/10/2005

Dal testo esercizi: n.12 pag.93, dal n. 24 al n. 31 pag. 96, n. 35 pag. 96, n. 45,47,57,60,64 pag.97 e n. 74,76 pag. 98.

Esercizi di calcolo di limiti con le operazioni, sostituzioni, limiti notevoli.

Calcolo di limiti in presenza di casi di indecisione per somma e prodotto.

5. TEORIA Venerdì 14/10/2005

SUCCESSIONI: teorema ponte e suo uso per dedurre la non esistenza di certi limiti.

CONTINUITÀ: Somma, prodotto e quoziente di funzioni continue sono funzioni continue. Le funzioni polinomiali sono continue. Le funzioni razionali fratte sono continue. Tutte le funzioni circolari sono continue. Teorema della funzione composta con funzioni continue.

INFINITESIMI ed INFINITI: loro confronto. Principio di sostituzione nelle forme $0/0$ e ∞/∞ . Qualche esempio di calcolo di limiti con il principio di sostituzione.

0.4 SETTIMANA IV

1. ESERCIZI Lunedì 17/10/2005

Alcuni limiti fondamentali legati al limite e : vedere a pag.149 del testo Teoria.

Esercizi di calcolo di limiti con uso della continuità e delle sostituzioni.

Esercizi su infinitesimi, infiniti, loro confronto.

Calcolo di limiti in presenza di casi di indecisione per somma, prodotto e quoziente. Uso del principio di sostituzione.

Fare esercizi dal 13 al 16 a p. 93 e a piacere dall'82 al 91 a p. 99 del Testo Esercizi.

2. TEORIA Martedì 18/10/2005

Relazione di asintoticità ed applicazione allo studio sintetico dei grafici. Relazione di questa con gli sviluppi in 'o piccolo'.

Regole di calcolo per il limite di $f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$.

Classificazione delle discontinuità. Prolungamento per continuità. Esempi. Le funzioni di Dirichlet, parte intera e segno.

3. TEORIA Mercoledì 19/10/2005 (video da Rovigo)

Definizioni delle funzioni iperboliche ed uso delle asintoticità per dedurre il grafico. Loro continuità.

Teorema: f continua $\Rightarrow |f|$ continua (con facile dim.)

Ordine di un infinitesimo (infinito) rispetto ad un altro; esercizi relativi.

Successioni: Teorema del limite di successioni monotone.

Teorema dell'esistenza degli zeri per le funzioni continue con dimostrazione ed applicazione.

4. ESERCIZI Giovedì 20/10/2005

Esercizi su infinitesimi, infiniti, principio di sostituzione. Ordine di infinitesimo/infinito di qualche funzione Fare esercizi dal 13 al 16 p.93 e a piacere dall'82 al 91 a p. 99 del Testo Esercizi. Prolungamenti per continuità Grafici con asintoticità (qualitativi).

5. TEORIA Venerdì 21/10/2005

I. Teoremi sulle funzioni continue:

- Corollario del teorema degli zeri sulle soluzioni di disequazioni con dim. a p.167 Testo
- Di Weierstrass (senza dim.); necessità di ciascuna ipotesi.
- Corollario-teorema di tutti i valori con dimostrazione (v. Dispensa a p.70)
- La funzione inversa di una funzione continua monotona stretta è continua purchè questa ultima sia definita su un intervallo; esempi e controesempi.
- Nozione di DERIVATA: l'operazione di prendere il rapporto incrementale e il suo limite in un punto del dominio di una generica funzione. Definizione di derivata. Sviluppo in 'o piccolo' di una funzione derivabile in un punto (con dim.).

0.5 SETTIMANA V

1. ESERCIZI Lunedì 24/10/2005

Qualche esercizio su ordine di infinitesimo/infinito rispetto ad un altro: ved. esercizi in ESEMPIO 28 e 29 p.142, 144 Testo Teoria.

Trattare gli asintoti verticali, orizzontali ed obliqui per una funzione; fare esempi a piacere.

Esercizi su calcolo dei limiti fondamentali nei bordi del dominio di una $f(x)$, ricerca degli asintoti, studio del segno e posizionamento del grafico rispetto agli asintoti orizzontali od obliqui. (Ved. NOTA sotto)

Qualche studio qualitativo del grafico sfruttando le asintoticità' (ad esempio per il $Coshx$, $Tghx$).

Applicazioni del teorema degli zeri alla soluzione di disequazioni. Esercizi di applicazione dei teoremi sulle funzioni continue dal Testo Esercizi:

n. 6, 7 p. 116; n. 1, 2, 5 p. 118; n. 7 a, b, e ; $8b - c$ p. 119; n. 16, 17 p. 120;

NOTA: Lo studio di funzione si può condurre, in base alla teoria fino ad ora svolta, seguendo lo schema seguente:

- (a) Ricerca del **dominio** D ed eventuali simmetrie e periodicità.
- (b) Calcolo dei **limiti** agli estremi, finiti o infiniti, del dominio D e dei limiti laterali nei punti di discontinuità.
- (c) Ricerca degli eventuali **asintoti** verticali, orizzontali/obliqui
- (d) Studio della **continuità**; eventuali **prolungamenti** per continuità in punti esterni ma d'accumulazione a D

2. TEORIA Martedì 25/10/2005

Derivate laterali.

Sulla continuità della funzione inversa di una funzione continua (v. Guida a p.71).

Relazioni tra invertibilità, monotonia e continuità. Dimostrazione del criterio di invertibilità.

Interpretazione geometrica della derivata. Equazione della retta tangente al grafico di una $f(x)$.

Derivata di $\sin x$ e a^x con dimostrazione. Derivata di $kf(x)$. Derivate di alcune funzioni elementari.

La derivabilità implica la continuità (bilaterali o laterali) (con dim., v. anche Guida p.80).

Teoremi sulle operazioni di funzioni derivabili:

dimostrazioni di $(f + g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$. Derivata di x^n e di $f^n(x)$, col principio di induzione.

3. TEORIA Mercoledì 26/10/2005 (video da Treviso)

Derivata della funzione composta (regola della catena). Regole di derivazione generalizzate, derivata logaritmica.

Sulla derivabilità della inversa di una funzione derivabile.

Derivate di esponenziale e logaritmo in base qualunque, con dimostrazione della prima.

Estremi locali. Teorema di Fermat (T.5.6 p. 195 testo teoria) con dimostrazione.

Teorema di Rolle con dimostrazione.

4. ESERCIZI Giovedì 27/10/2005

Esercizi di tutti i tipi sul calcolo delle derivate (v. p.136 e seguenti *TestoEse*).

Esercizi di applicazione teorica su derivate: nn.23, 24, 27 p.140; 30, 32 p. 141;

Vedere un esempio di punto angoloso, cuspide e punto a tangente verticale.

5. TEORIA Venerdì 28/10/2005

Teorema del valore medio di Lagrange con dimostrazione (attenzione: la dim. non è quella scritta nella dispensa verde: quella spiegata a lezione verrà pubblicata, insieme alla dim. del teor. di Rolle, nella pagina web tra qualche giorno; intanto riferirsi agli appunti).

Conseguenze del teorema di Lagrange: se una funzione ha derivata nulla in un intervallo è costante; segno di f' e monotonia di f ; teorema di esistenza della derivata laterale con esempi.

Insieme di tutte le primitive (da una conseguenza del teorema di Lagrange). Primitive immediate.

Derivate successive. Esempio di una funzione (la $f(x) = x|x|$) derivabile con continuità e non avente derivata seconda in $x = 0$.

Convessità per corde e per tangenti.

Criterio di convessità (Teorema 5.19 p.227). Punti di flesso.

0.6 SETTIMANA VI

1. TEORIA Mercoledì 2/11/2005 (video da Feltre)

Teorema: condizione necessaria per essere un punto di flesso (con dimostrazione).

Criterio delle derivate di ordine superiore per trovare estremi locali e flessi.

Regola di De L'Hospital con applicazioni.

Sviluppi e polinomi di Taylor. Resto di Peano.

Sviluppo di Mac Laurin di e^x .

2. ESERCIZI Giovedì 3/11/2005

Esercizi su studi di funzione completi.

3. TEORIA Venerdì 4/11/2005

Sviluppi di Taylor con il resto nella forma di Lagrange. Approssimazioni dei valori delle funzioni svilupabili.

INTEGRALI DEFINITI: vedere Cap. 11 (a p. 91). Definizione di integrale definito di Riemann. Ogni funzione costante è Riemann-integrabile. Proprietà dell'integrale definito.

0.7 SETTIMANA VII

1. ESERCIZI Lunedì 7/11/2005

Sviluppi di Taylor di funzioni notevoli, usando qualche sostituzione negli sviluppi per generarne altri.

Sviluppi di Taylor con il resto di Lagrange: qualche approssimazione, ad es. radice di e , radice cubica di e , a meno di 1:100, 1:1000.

Qualche studio di funzione completo; usare sempre gli sviluppi in 'o piccolo' per calcolare i limiti.

2. TEORIA Martedì 8/11/2005

INTEGRALI DEFINITI: la funzione di Dirichlet non è Riemann-integrabile. Classi di funzioni integrabili. Proprietà dell'integrale definito.

Teorema della media integrale con dimostrazione nel caso della continuità di f .

Funzione integrale F . Se f è Riemann-integrabile allora F è continua (con dimostrazione). Teorema e formula fondamentali del calcolo differenziale con dimostrazione (Teor. 6.7 e Cor 6.1 *TestoTeo*).

3. TEORIA Mercoledì 9/11/2005 (video da Rovigo)

Tabella delle primitive immediate. Tabella delle primitive ottenute dalla precedente con le sostituzioni.

Integrazione per scomposizione in somma, per sostituzione e per parti.

Calcolo di aree con gli integrali definiti.

4. ESERCIZI Giovedì 10/11/2005

Integrazione delle funzioni razionali fratte. Esercizi di integrazione indefinita e definita.

Esercizi su studi di funzione.

5. TEORIA Venerdì 11/11/2005

Integrali generalizzati su intervalli limitati di funzioni non limitate.

Integrali generalizzati su intervalli illimitati.

Esempi e definizioni.

Criterio di integrabilità del confronto.

0.8 SETTIMANA VIII

1. ESERCIZI Lunedì 14/11/2005

Studi di funzione. Calcolo di primitive e di integrali definiti.

Qualche integrale generalizzato: ad esempio nn.51–54 a p.233 *TestoEse.*

2. TEORIA Martedì 15/11/2005

Criterio di integrabilità del confronto asintotico. Criterio del confronto al limite. Assoluta integrabilità

3. TEORIA Mercoledì 16/11/2005 (video da Treviso)

Introduzione alle SERIE.

Esempi di somme infinite, serie geometrica associata ad un numero decimale illimitato periodico. Collegamento con gli integrali generalizzati.

Studio completo delle serie geometrica; dimostrazione della divergenza della serie armonica.

4. ESERCIZI Giovedì 17/11/2005

Esercizi sugli integrali generalizzati con uso di tutti i criteri.

5. TEORIA Venerdì 18/11/2005

Le serie telescopiche e la serie di Mengoli.

Proprietà delle serie.: dimostrazione di

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n, \quad \sum \sum c \cdot a_n = c \cdot \sum a_n.$$

Serie a termini di segno alterno; criterio di Leibnitz, con approssimazione della somma.

Serie a termini non negativi: Criterio del confronto per le serie.

0.9 SETTIMANA IX

1. ESERCIZI Lunedì 21/11/2005

Esercizi su determinazione del carattere di una serie usando solamente i criteri del confronto e di Leibniz, e le proprietà

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n, \quad \sum c \cdot a_n = c \cdot \sum a_n$$

Esercizi su integrali generalizzati e studio di funzione se si ritiene opportuno.

2. TEORIA Martedì 22/11/2005

I. Serie a termini non negativi: criteri del rapporto e della radice.

Serie a termini non negativi: criteri del confronto al limite (e quindi in particolare del confronto asintotico).

Serie a termini non negativi: criterio del confronto dell'integrale.

Criterio della convergenza assoluta per le serie.

II. Introduzione alle equazioni differenziali.

3. TEORIA Mercoledì 23/11/2005 (video da Feltre)

I. Esercizi sulla convergenza di serie.

II. Nozione di soluzione, soluzione generale, curve integrali, problema di Cauchy. Equazioni del primo ordine a variabili separabili: schema di soluzione.

4. ESERCIZI Giovedì 24/11/2005

Esercizi :

I. Studio del carattere di una serie con uso di tutti i criteri di convergenza spiegati.

II. Soluzione di equazioni differenziali immediate e del primo ordine separabili; problemi di Cauchy collegati. Gli esercizi sulle e.d. separabili a p. 306 – 7 Testo Esercizi.

5. TEORIA Venerdì 25/11/2005

I. Equazioni lineari del primo ordine omogenee: deduzione della soluzione generale con la tecnica di soluzione delle separabili. Esercizi.

II. Dimostrazione completa del teorema sulla soluzione generale della generica eq. diff. lineare del 1° ordine non omogenea. Esercizi.

0.10 SETTIMANA X

1. ESERCIZI Lunedì 28/11/2005

Esercizi su equazioni differenziali separabili e su equazioni lineari di ordine 1 non omogenee.

2. TEORIA Martedì 29/11/2005

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Combinazioni lineari di funzioni.

Caso omogeneo.

Caso non omogeneo: metodo della simiglianza per la ricerca dell'integrale particolare.

Esercizi relativi.

3. TEORIA Mercoledì 30/11/2005 (video da Rovigo)

Esercizi su equazioni differenziali lineari di ordine 2 a coefficienti costanti, non omogenee. Ricerca della soluzione particolare anche col principio di sovrapposizione.

Esercizi di ripasso: studi di funzione.